



Modélisation et optimisation d'un récupérateur d'énergie vibratoire électromagnétique non-linéaire multimodale

Issam Abed

► To cite this version:

Issam Abed. Modélisation et optimisation d'un récupérateur d'énergie vibratoire électromagnétique non-linéaire multimodale. Mécanique [physics]. Université de Franche-Comté; École nationale d'ingénieurs de Tunis (Tunisie), 2016. Français. NNT : 2016BESA2003 . tel-01383501

HAL Id: tel-01383501

<https://theses.hal.science/tel-01383501>

Submitted on 18 Oct 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

■ Modélisation et optimisation d'un récupérateur d'énergie vi- bratoire électromagnétique non- linéaire multimodale

M. ISSAM ABED

Pour obtenir le grade de docteur de l'Université de Franch-comté

Spécialité: Mécanique.

Thèse soutenue le 9 Juillet 2016 devant le jury d'examen composé de :

M.Tahar FAKHFAKH

M.Fehmi NAJAR

M.Mohamed ICHCHOU

M.Mnaouar CHOUGHANE

M.Noureddine BOUHADDI

M.Mohamed Lamjed BOUAZIZI

M.Najib KACEM

Pr, ENIS Sfax, Tunisie

MCF HDR, EPT Tunis, Tunisie

Pr, ECL Lyon, France

Pr, ENIM Monastir, Tunisie

Pr, UFC Besançon, France

MCF HDR, IPEIN Nabeul, Tunisie

MCF, UFC Besançon, France

Président

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Directeur de thèse

Directeur de thèse

Co-encadrant de thèse

(FEMTO-ST, DMA)

*Je dédie cette Thèse,
à tous ceux et toutes celles
qui m'ont accompagné et soutenu
durant ces années d'études.*

Remerciements	1
----------------------	----------

Introduction	3
---------------------	----------

Chapitre 1	
État de l'art : Récupération de l'énergie vibratoire	
1.1	Introduction : 5
1.2	Historique sur la récupération de l'énergie 5
1.3	Sources de récupération d'énergie : 6
1.3.1	Récupération de l'énergie à partir de l'activité humaine 7
1.3.2	Récupération de l'énergie à partir des structures de génie civil 9
1.3.3	Récupération de l'énergie à partir des vagues océaniques 11
1.3.4	Récupération de l'énergie à partir des voies ferroviaires 11
1.3.5	Récupération d'énergie à partir des suspensions de véhicules 12
1.4	Transducteurs de récupération d'énergie 13
1.4.1	Récupération de l'énergie par les matériaux piézoélectriques 14
1.4.2	Récupération de l'énergie par les générateurs électromagnétiques . . . 16
1.5	Circuits de récupération d'énergie 20
1.5.1	Convertisseur de tension AC-DC 20
1.5.2	Régulateurs de tension 21
1.5.3	Le contrôle de la force 21
1.5.4	Contrôle bidirectionnel du flux d'énergie 21
1.6	Techniques d'amélioration de récupération d'énergie 23
1.6.1	Réglage manuelle 23
1.6.2	Réglage automatique 25
1.6.3	Configuration multimodale linéaire 28
1.6.4	Configuration non linéaire 31
1.7	Conclusion 33

Chapitre 2	
Méthodes de résolution des problèmes de la dynamique non-linéaire	
2.1	Introduction 35
2.2	Méthode de perturbation à échelles de temps multiples 35
2.3	Méthodes d'intégration temporelle 39
2.3.1	Méthode de Runge-Kutta 40
2.3.2	Méthodes implicite et explicites à plusieurs étapes 41

2.3.3	La Méthode de Newmark	41
2.3.4	La Méthode de Shooting	42
2.4	Méthode de la balance harmonique et méthode asymptotique numérique . . .	43
2.4.1	Transformation quadratique	44
2.4.2	Application de HBM	44
2.4.3	Continuation par la Méthode Asymptotique Numérique (MAN)	44
2.4.4	Programmation sous MANLAB	45
2.5	Application	46
2.5.1	Oscillateur de Duffing forcé	46
2.5.2	Deux Oscillateurs non linéaire couplés et forcés	47
2.6	Analyse de sensibilité	50
2.6.1	Analyse de sensibilité locale	51
2.6.2	Analyse de sensibilité globale	52
2.7	Optimisation multi-objectif	52
2.8	Conclusion	53

Chapitre 3

Réseaux d'aimants en lévitation avec couplage magnétique

3.1	Introduction	55
3.2	Modélisation du système dynamique	55
3.2.1	Description du générateur proposé	55
3.2.2	Force de lévitation magnétique	56
3.2.3	Force d'amortissement électromagnétique	57
3.2.4	Équation de mouvement	58
3.2.5	Puissance récupérable par le circuit électrique	59
3.2.6	Procédure de résolution	60
3.3	Résultats et discussion	62
3.3.1	Spécifications d'un récupérateur non-linéaire à un seul ddl	62
3.3.2	Étude paramétrique d'un récupérateur d'énergie à 2 ddl	65
3.3.3	Optimisation multiobjectifs d'un récupérateur d'énergie à deux ddl . .	67
3.3.4	Optimisation multiobjectifs d'un récupérateur d'énergie à 3 ddl	71
3.4	Étude comparative	77
3.4.1	Avantages du couplage non-linéaire	77
3.4.2	Avantages de l'interaction modale	79
3.4.3	Conclusion	80

Chapitre 4

Réseau périodique de poutres en grands déplacements avec couplage magnétique

4.1	Introduction	81
4.2	Modélisation du système dynamique	81
4.2.1	Description du générateur proposé	81
4.2.2	Mise en équation	83
4.2.3	Projection modale	87
4.3	Résultats et discussion	89
4.3.1	Cas d'une seule poutre en interaction magnétique	89
4.3.2	Cas de deux poutres en interaction magnétique	92
4.3.3	Cas de trois poutres en interaction magnétique	99
4.3.4	Étude comparative entre les récupérateurs à 2ddl et à 3ddl	106
4.4	Conclusion	109

Conclusions et perspectives

Conclusion

Annexe A

Cas 1 ddl

Annexe B

Cas 2 ddl

Annexe C

Modèle avec couplage piézoélectrique

Bibliographie

123

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier mes directeurs de thèse pour m'avoir permis de relever le défi de la cotutelle de thèse entre l'Université Bourgogne - Franche-Comté, en France, et l'Université de Tunis - El Manar, en Tunisie. Plus particulièrement, je remercie Monsieur Bouhaddi Nouredinne, Professeur à l'Université de Franche comté en France, pour m'avoir accueilli au département Mécanique appliquée et dans son groupe de recherche sur la logique du discours et pour leur expertise qu'il m'a apportée en dynamique des structures et m'a aidé beaucoup pour résoudre tant de problèmes dans ma thèse. De plus, sa ténacité et son savoir-faire m'ont permis d'acquérir la manière de produire scientifiquement des papiers de haute qualité sans oublier son accueil chaleureux au sein du département mécanique appliquée de l'Institut FEMTO durant mes séjours en France. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance. Je remercie également Monsieur Bouazizi Mohammed Lamjed, Maître de conférences HDR à l'Institut Préparatoire aux Études d'ingénieurs de Nabeul, pour m'avoir permis de découvrir le monde de la recherche lors de mon année de master, pour m'avoir soutenue et suivie quand j'ai eu l'idée saugrenue de vouloir m'engager dans une thèse en cotutelle, et enfin pour avoir su me pousser jusqu'au bout pour que je donne le meilleur de moi-même et que j'arrive au bout de cette aventure. De plus, je remercie Monsieur Kacem Najib, Maître des conférences à l'Université de Franche comté en France, pour sa disponibilité, sa rigueur scientifique et pour l'ambiance conviviale de travail qui a régné au cours du déroulement de la thèse. Il m'a beaucoup apporté dans l'aboutissement de ce travail par ses encouragements, ses éclaircissements ainsi que nos précieux échanges tant d'un point de vue numérique que théorique. Je remercie profondément Messieurs :

- Monsieur Tahar FAKHFAKH, Professeur, à l'École Nationale d'Ingénieurs de Sfax de m'avoir fait le grand honneur de présider le jury de ma soutenance.

- Monsieur Fehmi NAJAR, Maître de Conférences HDR à l'École Polytechnique de Tunisie et Monsieur Mohamed ICHCHOU, Professeur à l'École Centrale de Lyon, d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je leur exprime toute ma gratitude pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de ce travail et pour leurs appréciations.

- Monsieur Mnaouar CHOUCANE, Professeur, à l'École Nationale d'Ingénieurs de Sfax d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.

J'adresse mes grands remerciements à tous les membres du département génie mécanique de l'ENIT et de l'IPEIN, qui de près ou de loin ont contribué au bon déroulement de mes travaux tout le long des années de ma thèse. Mes remerciements s'adressent également aux membres du département Mécanique appliquée FEMTO-ST de Besançon pour leur accueil et leur soutien.

Je tiens à remercier spécialement ma famille, ma fiancée et mes amis qui m'encourageaient pendant la préparation de ce travail.

Introduction

Motivation de l'étude

Les structures mécaniques sont soumises à des vibrations ambiantes qui pourraient être exploitées pour récupérer de l'énergie en utilisant des générateurs adéquats. Grâce aux transducteurs qui convertissent l'énergie mécanique en énergie électrique. L'énergie produite dans ces cas, pourra être stockée et utilisée dans des applications non énergivores pour lesquelles l'autonomie est une priorité, indépendamment des conditions extérieures dans lesquelles ces structures sont situées. Cette approche de production d'énergie est bien adaptée aux systèmes intelligents de petites tailles tels que les réseaux de capteurs ou les systèmes embarqués, ou les portables.

Les récupérateurs d'énergie vibratoire (Vibration Energy Harvesters : VEH) utilisent principalement trois types de transduction : piézoélectrique, électrostatique et électromagnétique. Chacune présente des avantages et des inconvénients par rapport à la source de vibration et à l'encombrement requis. Les récupérateurs d'énergie sont généralement conçus et optimisés pour des fréquences qui correspondent à celles de l'excitation. Ces résonateurs mécaniques possèdent un amortissement faible (facteur de qualité important), ce qui engendre une grande perte de la puissance électrique récoltée dès qu'une légère déviation de la fréquence d'excitation par rapport à la fréquence de résonance se produit. Pour remédier à cette perte, des systèmes avec réglage des fréquences propres ont été développés. Ce qui permet l'utilisation des transducteurs de récupération sur une large bande de fréquences.

L'introduction des non-linéarités de type quadratique ou cubique (Duffing) peut aussi améliorer considérablement la bande passante, ce qui permet d'augmenter la puissance récupérée. Une solution pour introduire des non-linéarités consiste à utiliser un résonateur électromagnétique avec le principe de fonctionnement en lévitation magnétique [1,2] ou bien l'utilisation de la non-linéarité géométriques des poutres [3].

De même l'utilisation de l'approche multimodale permet d'améliorer la puissance récupérée ainsi que la bande passante. Pour introduire cette technique qui consiste à utiliser par exemple un réseau de résonateurs de type masse-ressort, poutres couplées,... etc [4]. Roundy et al. [5] ont utilisé des poutres piézoélectriques couplées de différentes longueurs avec une masse à l'extrémité libre de chaque poutre .

Dans ce thèse, on propose la modélisation du comportement dynamique d'un générateur composé soit d'un réseau d'aimants en lévitation magnétique soit d'un réseau des poutres en grands déplacement. Dans ces deux approches, on exploite avantageusement les propriétés du couplage non-linéaire et multimodale afin d'élargir la bande passante et d'augmenter la puissance récupérable.

L'objectif principal est de trouver des stratégies de dimensionnement et de conception optimale pour maximiser les performances de ces systèmes de récupération d'énergie vibratoire.

Présentation des travaux

Le travail de thèse est composé de quatre chapitres :

Le premier chapitre présente une étude bibliographique sur la récupération d'énergie. On commence la récupération d'énergie à partir des mouvements humains, des véhicules, des moyens de transport, des structures mécaniques et civiles complexes et des vagues océanique. De même, nous présentons l'intérêt des transducteurs piézoélectriques, les transducteurs électromagnétiques et les circuits d'interface de récupération d'énergie. Enfin, on présente les techniques qui permettent d'augmenter la bande passante à travers un réglage manuel ou automatique ou bien l'utilisation des stratégies non-linéaires et/ou multimodales.

Le deuxième chapitre présente les méthodes de résolution des équations non linéaires telle que la méthode de perturbation à échelles de temps multiples, la méthode d'intégration temporelle (directe, Shooting, . . .), les méthodes de continuations et la méthode de la balance harmonique.

En simulations numériques, deux applications sont présentés, la première utilise une non-linéarité de Duffing et la deuxième présente un modèle non-linéaire à 2 ddl. A la fin du chapitre, une étude de sensibilité à priori suivie d'une optimisation multiobjectif sont effectuées afin d'aboutir à des solutions optimale.

Dans le troisième chapitre, on propose une stratégie multiphysique (mécanique- électromagnétique) d'un récupérateur d'énergie par lévitation électromagnétique non-linéaire composé d'un réseau d'aimants couplés. Le couplage entre les différents aimants en lévitation conduit à un modèle multiphysique non-linéaire sous excitation harmonique à la base. Ce modèle est résolu par les méthodes numériques de la balance harmonique couplé avec la méthode asymptotique numérique. Pour aboutir à des paramètres de conceptions optimaux, une étude de sensibilité paramétrique suivie d'une optimisation multiobjectifs est réalisée. L'analyse du bilan énergétique pour maximiser la puissance récupérée sur une large bande constitue l'objectif principal de cette stratégie.

Dans le quatrième chapitre, la stratégie proposée précédemment est étendue à l'exploitation simultanée de la non-linéarité magnétique, géométrique, de la périodicité du réseaux et du couplage magnétique. Le nouveau récupérateur est composé de plusieurs poutres identiques couplées par des aimants mobiles. Le modèle non-linéaire obtenue est issue de l'exploitation du principe d'Hamilton et de la procédure de discrétisation de Galerkin. Ce modèle est résolu par la méthode de la balance harmonique couplé avec la méthode asymptotique numérique. Pour aboutir à des paramètres de conceptions optimaux, une étude de sensibilité paramétrique suivie d'une optimisation multiobjectifs est effectuée. L'objectif est encore de maximiser la puissance récupérée sur une large bande.

Chapitre 1

État de l'art : Récupération de l'énergie vibratoire

1.1 Introduction :

Suite aux préoccupations mondiales face à l'augmentation de la pollution de l'environnement à cause de l'utilisation de l'énergie fossile, la récupération de l'énergie à partir des vibrations devient un axe de recherche et d'actualité. Cette énergie propre permet de réduire la consommation dans les systèmes électroniques, ce qui permet d'autoalimenter les capteurs et les systèmes d'acquisitions des données à distance. En fait, dans certaines situations l'amplitude des vibrations peut être très grande, par exemple, les vibrations des immeubles de grande hauteur, des ponts, des véhicules, des chemins de fer, des vagues de l'océan, et même les mouvements humains. Actuellement, la plupart des récupérateurs d'énergie vibratoire sont linéaires. Ces récupérateurs ont une faible bande passante au voisinage de leurs fréquences de résonance. De plus, la fréquence des vibrations ambiantes varie d'une manière aléatoire sur une large gamme de fréquences. Par conséquent, l'augmentation de la largeur de bande passante des récupérateurs d'énergie est l'un des problèmes les plus critiques dans la pratique. Dans ce chapitre on commence par une brève présentation sur l'historique de la récupération d'énergie. Sous le thème de récupération d'énergie à partir des vibrations, on va présenter quelques applications à partir de mouvements humains, des véhicules, de transports, des structures et des vagues de l'océan. De même, on va présenter les transducteurs piézoélectriques ainsi que les transducteurs électromagnétiques et les circuits d'interface de récupération d'énergie. Enfin, on présente les techniques réalisées au cours des dernières années sur l'amélioration de récupération d'énergie. Parmi ces techniques, on s'intéresse principalement à l'augmentation de la bande passante à travers le réglage manuel ou automatique ou bien l'utilisation de la configuration non linéaire ou multimodale.

1.2 Historique sur la récupération de l'énergie

La première observation de la récupération d'énergie était en 1826. Thomas Johann Seebeck a constaté un courant qui circule dans un circuit fermé composé de deux métaux différents maintenus à des températures différentes [6, 7]. En 1831, Joseph Henry et Michael Faraday ont découvert le principe de la production d'électricité à partir du magnétisme, connu sous le

nom d'induction électromagnétique [8]. En Octobre de cette même année, Faraday a inventé le premier générateur à courant continu constitué d'une plaque de cuivre en rotation entre les pôles magnétiques [9]. En 1839, Edmund Becquerel a découvert l'effet photovoltaïque [10]. La première grande surface de la cellule solaire a été construite en 1894 par Charles Fritts, elle est revêtue d'une couche de sélénium et d'une fine couche d'or [11]. Après l'élaboration de la théorie quantique de la lumière et de la physique à l'état solide dans les années 1900 [10], l'effet photovoltaïque est devenu plus compréhensible. De même, les effets thermoélectriques de base ont été étudiés macroscopiquement, et leur applicabilité à la thermométrie, la production d'énergie, et la réfrigération a été reconnue [12]. En 1880, la première observation de la récupération d'énergie était sous la forme d'une charge. Pierre et Jacques Curie ont prouvé expérimentalement que certains cristaux présentent une charge superficielle lorsqu'ils sont soumis à des contraintes mécaniques. Ce phénomène est nommé (la piézoélectricité) [7].

1.3 Sources de récupération d'énergie :

La récupération d'énergie existe depuis des siècles sous la forme des moulins à vent et à eau, et des systèmes d'énergie solaire passif, etc., [13]. Ainsi, Les progrès de la technologie microélectronique et l'évolution de la technologie de récupération d'énergie nous permettent de charger les batteries d'une manière autonome et d'avoir par conséquent des dispositifs autoalimentés. L'énergie mécanique récupérée par ces générateurs ne peut pas être convertie totalement en une énergie électrique à cause des pertes énergétique (Figure 1.1).

Pour chaque source de récupération, il existe toujours un convertisseur d'énergie adapté pour transformer l'énergie d'entrée en énergie utile de la forme voulue. Nous pouvons classer les six formes principales de l'énergie classique comme suit : l'énergie mécanique, l'énergie électrique, l'énergie thermique, l'énergie chimique, l'énergie nucléaire et l'énergie rayonnante. La Figure 1.2 regroupe les différentes formes de l'énergie.

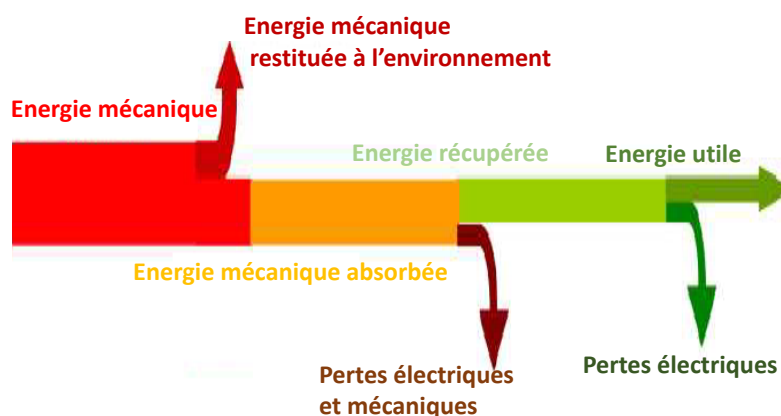


FIGURE 1.1 – Pertes énergétique dues aux conversions de l'énergie mécanique [14]

Nous pouvons récupérer l'énergie renouvelable à partir de l'activité humaine et l'activité animale ou bien à travers l'environnement comme l'énergie solaire, l'énergie éolienne, l'énergie

hydraulique, l'énergie vibratoire des véhicules, l'énergie des structures de génie civil, l'énergie des voies ferroviaires et l'énergie des vagues océaniques,

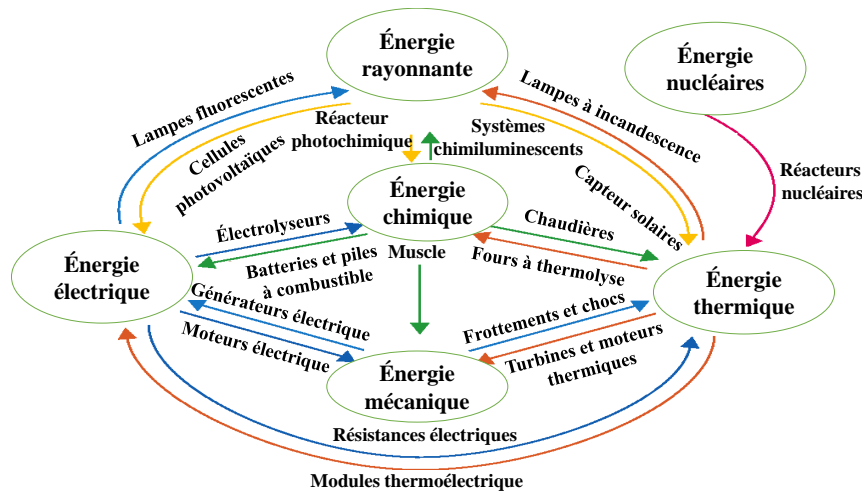


FIGURE 1.2 – Les différents types d'énergie [14]

1.3.1 Récupération de l'énergie à partir de l'activité humaine

La récupération d'énergie à partir de l'activité humaine a été examinée par Starnier & Paradiso [15]. L'énergie disponible récupérée est résumée dans la Figure 1.3. Comme l'indique la Figure 1.3, il existe de nombreuses sources de récupération de l'énergie humaine, y compris la marche, le mouvement des bras et des doigts, la respiration, la pression artérielle etc.

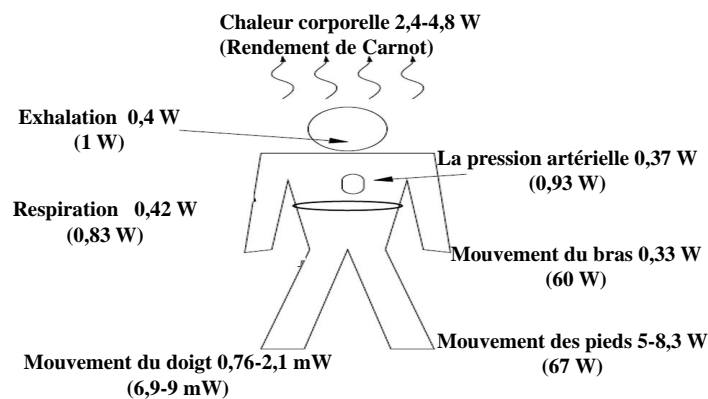


FIGURE 1.3 – L'énergie provenant des activités humaines . [15]

Il convient de noter que la plupart des sources de récupération humaine ont une faible énergie récupérée par rapport à l'énergie récupérée par la marche. Pour cela, Antaki et al. [16] ont développé une chaussure génératrice d'énergie en utilisant les céramiques piézoélectriques et en appliquant un mécanisme qui agrandi la force appliquée à travers un système hydraulique comme illustre la Figure 1.4. Ce générateur permet de récupérer une puissance moyenne de

0,85 W au cours de la marche normale d'une personne qui pèse 75 Kg et sans causer d'incident sur son activité de marche.

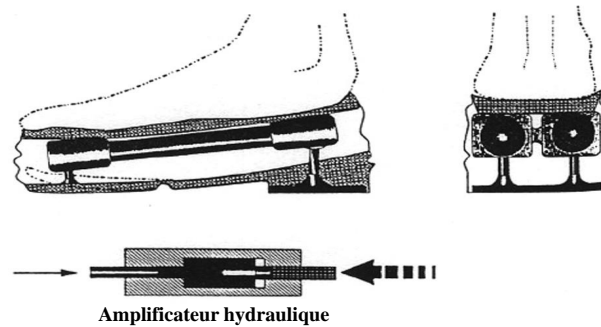


FIGURE 1.4 – Récupération de l'énergie humaine à travers les chaussures avec amplificateur de force hydraulique.[16]

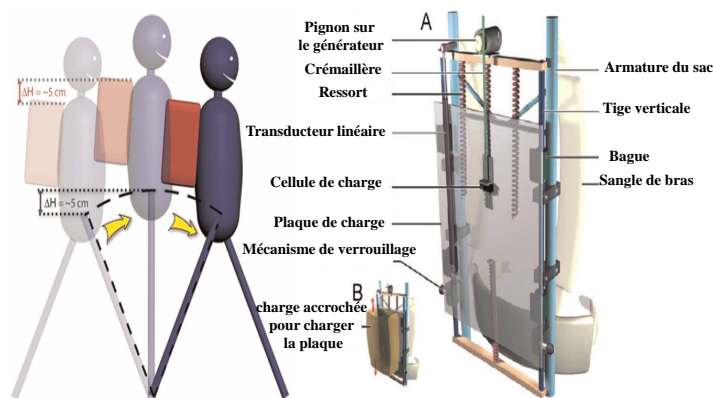


FIGURE 1.5 – Récupération de l'énergie de la marche humaine à partir du sac à dos. [17]

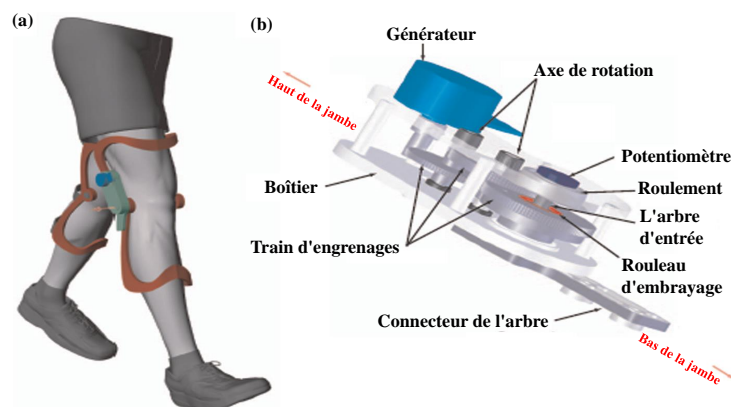


FIGURE 1.6 – Générateur monté sur les genoux, 4,8 W (a) Montage du récupérateur sur les deux jambes et (b) Conception mécanique du récupérateur. [18, 19]

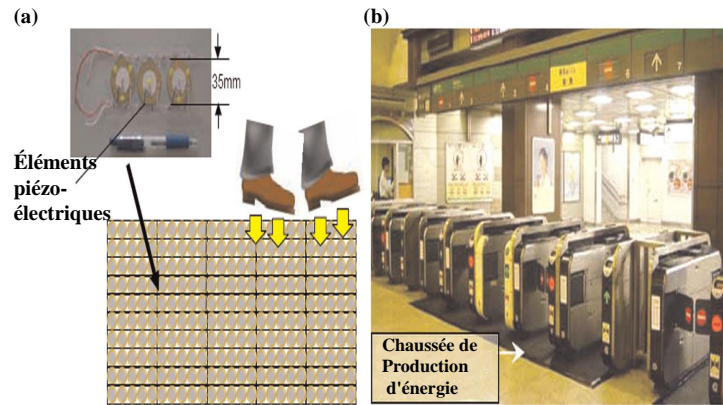


FIGURE 1.7 – Chaussée de production d'énergie : (a) les récupérateurs d'énergie piézoélectrique et (b) expérience dans la sortie de la gare Marunouchi de Tokyo

En utilisant l'énergie humaine, Rome et al. [17] ont développé un générateur qui récolte aussi l'énergie de marche humaine à travers l'entraînement d'un sac à dos comme l'illustre la Figure 1.5. Ce générateur permet de récupérer une puissance allant jusqu'à 7,4 W.

Donelan et al. et Li et al. [18,19] ont adopté un générateur électromagnétique avec réducteur dans leur système de récupération d'énergie de la marche humaine, comme le montre la Figure 1.6. Ils ont conçu un générateur monté sur les genoux qui n'influence pas beaucoup la marche humaine au cours de la récupération d'énergie. Le système de contrôle permet la production d'électricité à la fin de la phase d'oscillation lorsque les muscles des genoux fléchissent et il agit comme un mouvement de frein sur les genoux.

le centre de recherche et de développement Japonais du groupe JR East Company [20]] a développé un générateur de production d'électricité basée sur les transducteurs piézoélectriques. Ce récupérateur est testé à la gare de Tokyo (Figure 1.7). Il peut alimenter une ampoule de 100 W pendant environ 80 minutes.

1.3.2 Récupération de l'énergie à partir des structures de génie civil

Une autre technologie alternative prometteuse consiste à récupérer l'énergie vibratoire à partir des structures qui sont sensibles aux charges dynamiques du vent, du tremblement de terre, du mouvement des véhicules, et mouvements humains. En conséquence, il existe de fortes vibrations dans les structures telles que les immeubles à grande hauteur, les tours de communication, et les ponts de longue portée. Les grandes amplitudes de vibration peuvent endommager les structures ou les composants secondaires ou causer de l'inconfort aux êtres humains [21].

Les bâtiments et les ponts modernes sont constitués d'acier et de béton qui ont un faible amortissement. Le rapport d'amortissement typique ξ varie entre 0,5% et 1%. L'amplitude de vibration à la fréquence de résonance est de 50 à 100 fois plus grande que la déformation statique (facteur qualité $Q = 1/(2\xi) = 50-100$). Par conséquent, l'ajout d'un amortissement supplémentaire est la stratégie la plus importante pour contrôler les vibrations. Cela concerne les amortisseurs à fluide visqueux, les amortisseurs viscoélastiques, les dissipateurs métalliques, les amortisseurs à friction, et les amortisseurs avec masse pré-réglé (TMD : Tuned Mass Dampers) comme le montre la Figure (Fig.1.8). L'énergie vibratoire peut être convertie en électricité à

travers le remplacement des éléments dissipatifs visqueux par les transducteurs d'énergie. Les dissipateurs d'énergie comme le TMD et ses variantes (amortisseur visqueux, et ainsi de suite) deviennent de plus en plus connues [22] ; [21] ; [23].

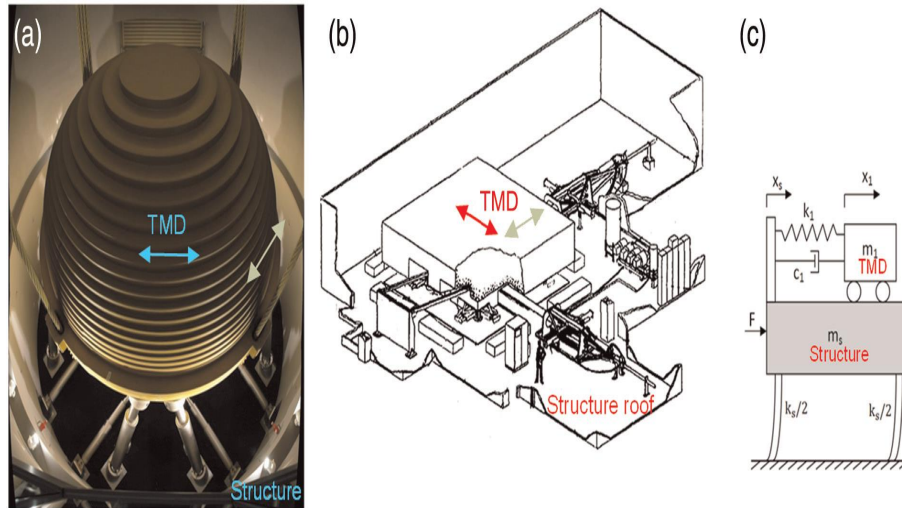


FIGURE 1.8 – Implémentations typiques de TMD dans les structures : (a) Bille de 730 tonnes de métal en suspension, (b) 410 tonnes de blocs de béton sur le sommet de la tour Citigroup, et (c) Modèle simplifié. [21, 22]

Au lieu de dissiper de l'énergie de vibration, Tang et Zuo [24, 25] ont proposé des amortisseurs TMD pour récupérer simultanément l'énergie de vibration et le contrôle de vibration sur un bâtiment prototype de trois étages. Tao et al. [26] ont estimé la puissance disponible pour la récupération dans les bâtiments typiques en tenant compte de la dynamique du vent et des amortisseurs TMD. Ils ont démontré que plus de 85 kW de puissance sont récupérés d'un bâtiment de 76 étages avec les amortisseurs TMD lorsque la vitesse du vent est de 13,5 m / s et à une hauteur standard de 10 m . Tang et Zuo [24] ont utilisé le mécanisme pignon-crémaillère pour convertir l'oscillation du bâtiment en rotation à la génératrice, comme le montre la Figure 1.8. La récupération d'énergie et la commande des vibrations sont réalisées en même temps.

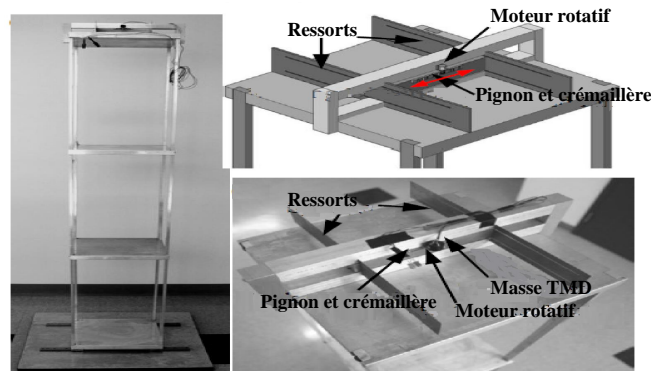


FIGURE 1.9 – Récupération de l'énergie des bâtiments à l'aide du mécanisme TMD. [24]

1.3.3 Récupération de l'énergie à partir des vagues océaniques

L'énergie des vagues de l'océan est considérée comme une autre source d'énergie renouvelable. En effet, cette énergie est développée par de nombreux chercheurs en raison de sa grande puissance. L'énergie des vagues a une puissance d'environ 8000 à 80000 TWh chaque année [27].

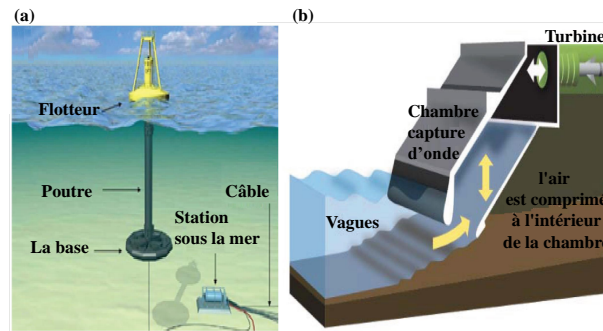


FIGURE 1.10 – Récupérateurs de l'énergie des vagues de l'océan. (a) [28](b) [29]

Généralement, les technologies de récupération de l'énergie des vagues de l'océan sont utilisées pour convertir l'énergie cinétique des vagues en électricité. La recherche de technologies de récupération de l'énergie des vagues a commencé à la suite des crises pétrolières au début des années 1970 [30]. En général, il existe trois principaux types de technologies de récupération de l'énergie des vagues :

- Le récupérateur d'énergie de type flotteur (Figure 1.10.a) exploite la force due aux oscillations des vagues pour produire de l'électricité.
- Le récupérateur d'énergie de type colonne d'eau (Figure 1.10.b). L'eau pénètre dans une chambre pour créer une force par l'air comprimé, entraînant une turbine qui produit de l'électricité.
- Le récupérateur d'énergie de type hydraulique. Ce dispositif contient un réservoir au-dessus du niveau moyen de l'eau à partir duquel la vague d'eau coule à travers l'un ou plusieurs turbines hydrauliques classiques.

1.3.4 Récupération de l'énergie à partir des voies ferroviaires

Un train exerce une charge importante sur la surface de la piste, ce qui induit une déviation sur cette piste [31]. Les wagons peuvent peser de 30 tonnes (vide) à 140 tonnes (chargé) chacun. Penamalli, Phillips et Wang et al. [32–34] ont utilisé un mécanisme de récupération d'énergie des vibrations de voies ferroviaires par un système pignon-crémaillère. Leurs systèmes de récupération d'énergie consistent à convertir la vibration bidirectionnelle en rotation unidirectionnelle du générateur. En conséquence, l'efficacité et la durée de vie du récupérateur peuvent être améliorées. La conception du prototype avec redresseur de mouvement réalisé par Wang et al [34] est illustrée par la Figure 1.11.

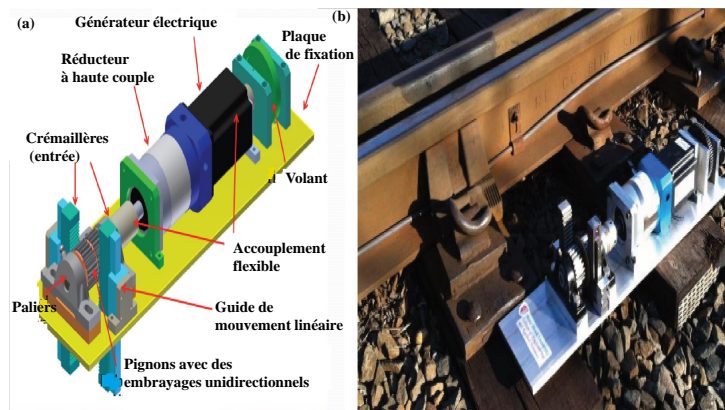


FIGURE 1.11 – Récupérateur d'énergie avec redresseur de mouvement : (a) Modélisation en 3-D ; (b) Prototype.

1.3.5 Récupération d'énergie à partir des suspensions de véhicules

Bandivadekar et al [35] ont montré que moins de la moitié de l'énergie du combustible est transférée à la roue motrice. En générale, seulement 10% -16% de l'énergie combustible disponible est utilisé pour conduire la véhicule à cause de la résistance de frottement de la route et de l'air . Il y a trois possibilités pour améliorer l'efficacité énergétique : soit à travers la récupération de la chaleur des déchets, soit la récupération de l'énergie par le freinage ou bien la récupération de l'énergie par les amortisseurs [36, 37].

Les chercheurs ont amélioré la puissance de récupération d'énergie dans les suspensions de véhicules [38–41]. En effet, les chiffres varient entre 46 W [41] jusqu'à 7500 W [38] pour un véhicule de tourisme.

Zuo et Zhang [42] ont évalué la puissance des systèmes de suspension du véhicule grâce à une modélisation mathématique intégrée dans le système de récupération des véhicules. Dans ce modèle, l'excitation due à l'irrégularité de la route est modélisée comme un processus aléatoire stationnaire où les densités spectrales de puissance de déplacement de différentes routes sont préconisées par les normes internationales (ISO 2631-1 : 1997, 1997), comme le montre la Figure 1.12.

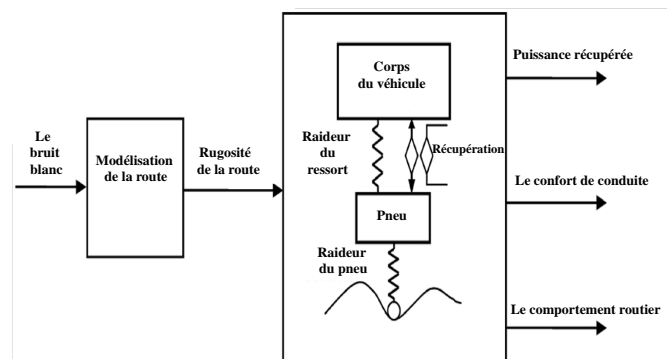


FIGURE 1.12 – Modélisation de la récupération de l'énergie sur une route. [42]

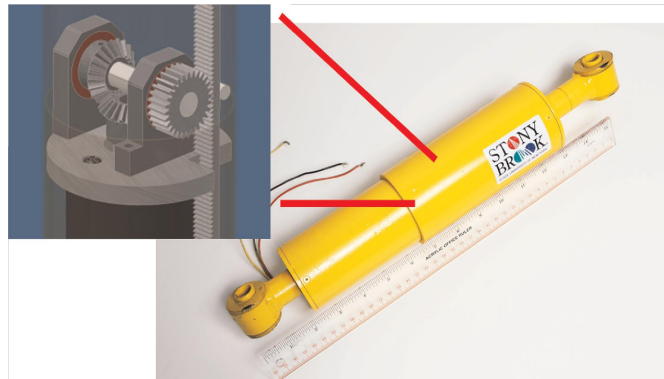


FIGURE 1.13 – Récupération d'énergie par l'amortisseur en utilisant le mécanisme pignon-crémaillère. [43]

Bose Corporation [43] a consacré plus de 20 ans pour développer un système unique de suspension à contrôle actif pour les véhicules ; ce qui peut considérablement améliorer le confort des passagers et la maniabilité du véhicule. Les moteurs électromagnétiques linéaires sont également utilisés pour récupérer une partie de l'énergie de vibration, et donc, une réduction de la consommation d'énergie de 1/3 dans le contrôle actif a été revendiquée [43]. La Figure 1.13 montre un amortisseur qui récupère l'énergie d'un véhicule avec un mécanisme de crémaillère pignon [42]. A travers l'utilisation d'un engrenage conique, l'amortisseur devient plus compact et peut être monté ultérieurement sur des véhicules conventionnels.

1.4 Transducteurs de récupération d'énergie

Traditionnellement, l'énergie de vibration est dissipée en chaleur à travers les dispositifs d'amortissement des systèmes. Au lieu de dissiper l'énergie vibratoire sous la forme de chaleur par ces amortisseurs, les chercheurs ont proposé l'utilisation des transducteurs dans les systèmes de récupération d'énergie pour convertir l'énergie mécanique en énergie électrique. Différents transducteurs ont été étudiés pour la récupération d'énergie de vibration comme les transducteurs piézoélectriques, les transducteurs électromagnétiques, les transducteurs électrostatiques, les transducteurs diélectriques, etc. Les transducteurs piézoélectriques et électromagnétiques ont plus de potentiel pour la récupération d'énergie de vibration. Dans certaines situations, il est intéressant d'utiliser les transducteurs piézo-électriques et électromagnétiques pour le contrôle actif des vibrations où l'utilisation de ces transducteurs est bidirectionnelle (Figure 1.14).

Les matériaux piézoélectriques et les générateurs électromagnétiques sont utilisés pour récupérer l'énergie vibratoire. Néanmoins, ils ont des caractéristiques différentes. Une force ou une contrainte permet d'induire sur le transducteur piézoélectrique, tandis qu'une variation de vitesse permet d'induire sur le générateur électromagnétique. Par conséquent, le matériau piézo-électrique est plus approprié pour les vibrations avec une grande force et une petite déformation et le générateur électromagnétique est plus approprié pour les cas où on a d'importantes amplitudes de déplacement ou de vitesse. Jusqu'à présent, les générateurs électromagnétiques sont utilisés pour la récupération d'énergie à grande échelle comme par exemple la récupération à partir de la suspension des véhicules et les bâtiments. Par ailleurs, les matériaux piézoélec-

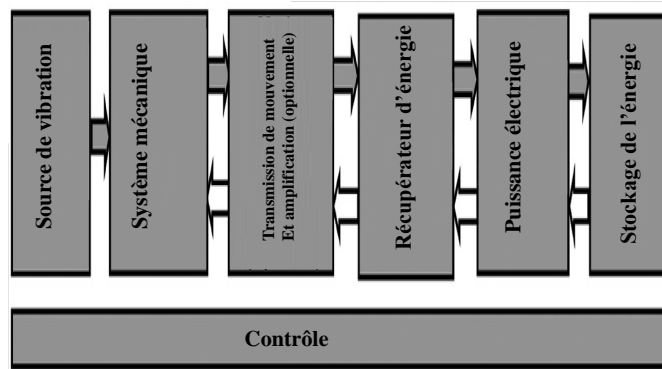


FIGURE 1.14 – Les composants typiques d'un système pour la récupération de l'énergie vibratoire.

triques ont une densité d'énergie importante [44] et sont plus adaptés pour les applications où le volume et la masse sont les plus importants. En outre, le générateur électromagnétique produit une basse tension, tandis que, les matériaux piézoélectriques génèrent une tension élevée, ce qui permet d'avoir des exigences différentes sur les circuits électroniques de puissance.

1.4.1 Récupération de l'énergie par les matériaux piézoélectriques

Le matériau piézoélectrique est l'un des matériaux les plus utilisés. Il peut se déformer lorsque nous appliquons une tension sur l'une des surfaces. D'autre part, il peut générer des charges ou une tension sur les surfaces lorsque nous lui appliquons une force ou une pression. La première caractéristique de la piézoélectricité nous permet d'utiliser ce matériau comme un actionneur, le cas par exemple des plieuses piézoélectriques et des hautparleurs. La seconde caractéristique de la piézoélectricité permet d'utiliser ce matériau comme capteurs, accéléromètres et microphones [45], ou bien pour récupérer l'énergie à partir des vibrations. Les équations électromécaniques qui régissent le comportement des matériaux piézoélectriques peuvent être exprimés par l'équation (1.1) :

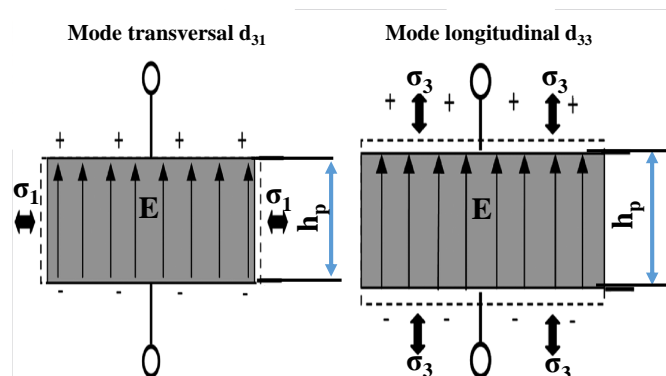


FIGURE 1.15 – Principaux modes de déformation du matériau piézoélectrique.

$$\begin{bmatrix} S \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & d \\ d & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ E \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Les variables utilisées dans l'équation (1.1) sont :

- Le déplacement électrique ou induction (C/m) : $D = \epsilon E + d\sigma$
- La déformation : $S = s\sigma + dE$
- La complaisance ou susceptibilité élastique (m^2/N) : s
- La permittivité électrique (F/m) : ϵ
- La constante piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ nul ou constant (C/N) ou (m/V) : d
- Le champ électrique (V/m) : E
- La contrainte (N/m^2) : σ

Les principaux modes de déformation pour un matériau piézo-électrique sont le mode d_{31} et le mode d_{33} , comme le montre la Figure 1.15. Ou h_p l'épaisseur et S_p la surface du matériau.

Le mode d_{31} apparaît souvent sur les patches piézo-électriques, où le champ électrique est perpendiculaire à la direction de la contrainte mécanique. Le mode d_{33} apparaît souvent sur les patches piézoélectriques où le champ électrique et la contrainte ont la même direction de polarisation. Lorsque le transducteur piézoélectrique récupère l'énergie, il peut être modélisé sous la forme d'un circuit en série composé d'une source de tension avec un condensateur, comme représenté sur la Figure 1.16.a. Sur la base du théorème de Thevenin et de Norton, il peut aussi être modélisé sous la forme d'un circuit en parallèle composé d'une source de courant avec un condensateur, comme représenté sur la Figure 1.16.b.

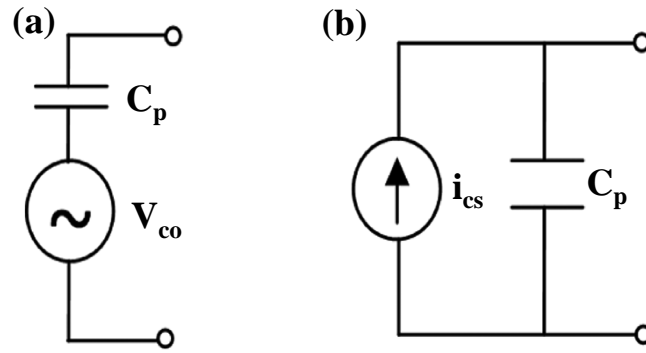


FIGURE 1.16 – Modélisation des matériaux piézoélectriques comme récupérateur de l'énergie : (a) Source de tension (b) Source de courant.

Lorsqu'il n'y a pas de déplacement de charge ($D = 0$), nous pouvons conclure que le matériau piézo-électrique est en circuit ouvert. D'après la relation dans l'équation (1.1) entre le champ électrique et la tension, nous pouvons obtenir la tension en circuit ouvert (V_{co}) générée par le matériau piézoélectrique exprimée par l'équation (1.2).

$$V_{co} = -E \times h_p = -\frac{d \times \sigma \times h_p}{\epsilon} = -V_{cst} \times \sigma \times h_p \quad (1.2)$$

Où : V_{cst} est la tension constante associée au coefficient piézoélectrique d par la relation :

$$d = \varepsilon \times V_{cst} \quad (1.3)$$

Pour le deuxième modèle, le courant de court-circuit peut être obtenu en court-circuitant les électrodes d'un matériau piézo-électrique. Dans ce cas ($E = 0$) le déplacement électrique peut être obtenu à partir de l'équation (1.1).

$$D = d \times \sigma \quad (1.4)$$

Par conséquent, le courant de court-circuit (i_{cc}) est obtenu sous forme d'équation (1.5), qui est proportionnelle à la dérivée de la tension.

$$i_{cc} = \dot{D} \times S_p = d \times \dot{\sigma} \times S_p \quad (1.5)$$

La charge électrique de court-circuit est proportionnelle à la contrainte :

$$Q_{cs} = d \times \sigma \times S_p \quad (1.6)$$

1.4.2 Récupération de l'énergie par les générateurs électromagnétiques

Les générateurs électromagnétiques sont souvent utilisés pour récupérer l'énergie de vibration, en particulier lorsque l'amplitude de vibration est grande. Le générateur électromagnétique peut agir à la fois comme un actionneur et un récupérateur d'énergie. La vitesse relatif \dot{v} entre le stator et le rotor peut induire une tension électromotrice e_m dans les bobines :

$$e_m = \alpha_e \dot{v} \quad (1.7)$$

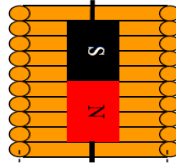


FIGURE 1.17 – Principe de récupération d'énergie par variation du champ magnétique.

Avec $\alpha_e = B * L$ est le coefficient de tension électromotrice, B est le champ magnétique induit et L est la longueur totale de la bobine. Lorsque l'aimant se déplace, un flux du courant dans la bobine va induire une force électromotrice proportionnelle au courant. Ce flux peut être modélisé comme une force d'amortissement électromotrice comme suit :

$$F_{ce} = \alpha_e i \quad (1.8)$$

Le récupérateur électromagnétique peut être modélisé en tant qu'une source de tension en série constituée d'une inductance et d'une résistance. Si l'inductance L_m de la bobine est faible et les deux électrodes du récupérateur électromagnétique sont shuntés avec une résistance R , la force électromotrice apparaîtra en tant que force d'amortissement visqueuse idéale.

$$F_{ce} = \frac{\alpha_e^2}{R + r_{int}} \dot{v} = c_e \dot{v} \quad (1.9)$$

Ou r_{int} est la résistance interne de la bobine. Si cette résistance est assez importante, l'énergie électrique est dissipée par effet joule (chaleur) [46]. Si on néglige l'inductance et la capacité, la résistance de charge R permet de mesurer et estimer la quantité d'énergie [47]. D'autre part, lorsque le transducteur électromagnétique est utilisée comme un amortisseur, la performance de récupération peut être encore améliorée en shuntant l'amortisseur à une résistance, un condensateur, et un réseau des bobines [48,49]. Au lieu de dissiper l'énergie électrique en chaleur, nous pouvons remplacer la résistance par un circuit de stockage de l'énergie électrique.

Les récupérateurs électromagnétiques de mouvement linéaires ont l'avantage d'être facile et récupère de l'énergie de manière fiable dans la plupart des dispositifs de récupération existants sans l'utilisation d'un mécanisme de transmission de mouvement. Dans ce contexte, Mann et Sims [1] ont développé un transducteur électromécanique constitué d'une boîtier avec deux aimants fixés à ses deux extrémités par filetage. Un aimant libre oscille pour créer un champ magnétique à l'intérieur de la bobine inférieure et de la bobine supérieure. Ces deux bobines sont enroulées autour du boîtier (Figure.1.18). Les interactions entre les aimants ont été estimées comme les interactions entre deux dipôles [1].

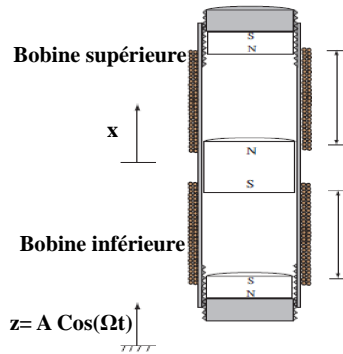


FIGURE 1.18 – Récupération d'énergie par le modèle de [1].

L'expression du champ magnétique générée par un dipôle numéro 1 (aimant inférieur) est situé à une distance r du deuxième dipôle numéro 2 (aimant supérieur) s'écrit [50, 51] comme suit :

$$\vec{B}_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{21}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\vec{m}_1}{r^3} - (\vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{21}) \frac{3\vec{r}_{21}}{r^5} \right) \quad (1.10)$$

Où μ_0 est une constante magnétique, m_1 est le moment magnétique du première dipôle, et r_{21} est un vecteur d'orientation entre le premier et le deuxième dipôle. De même Foisal et al. [52] ont étudié l'aimant en lévitation entre deux aimants fixes. Le champ magnétique de l'aimant mobile sur l'aimant fixe est donné par l'équation ci-dessous :

$$B = \frac{B_r}{2} \left(\frac{(r + h_M)}{\sqrt{(d_M/2)^2 + (r + h_M)^2}} - \frac{r}{\sqrt{(d_M/2)^2 + r^2}} \right) \quad (1.11)$$

Avec B_r est le champ magnétique résiduel, r est la distance qui sépare les deux aimants en opposition, d_M est le diamètre de l'aimant mobile et h_M est la hauteur. Faisal et al. [52] ont déterminé la force qui régit l'équilibre de l'aimant en lévitation :

$$F = \frac{\mu_0 Q_M}{4\pi} \left(\frac{Q_T}{r_2^2} - \frac{Q_B}{r_1^2} \right) \quad (1.12)$$

Où : r_1 est la distance qui sépare l'aimant inférieur et l'aimant mobile et r_2 est la distance qui sépare l'aimant fixe supérieur et l'aimant mobile. Q_M , Q_T et Q_B sont respectivement l'intensité magnétique de l'aimant mobile, de l'aimant supérieur et de l'aimant inférieur. De même von Büren et Tröster [53] ont proposé un récupérateur constitué d'un tube contenant plusieurs aimants permanents. Entre deux aimants consécutifs, ils ont mis une couche de polymère isolante. Les aimants consécutifs sont montés à polarité inversée. Les aimants ainsi que les couches de polymère sont collées. Une bobine est enroulée autour du tube pour récupérer les variations de ce champ magnétique. Cette structure (Figure 1.19) a un volume de 0.5 cm^3 récupérant $35 \mu\text{W}$ sur une résistance adaptée lorsqu'elle est montée sous le genou d'un piéton lors de la marche.

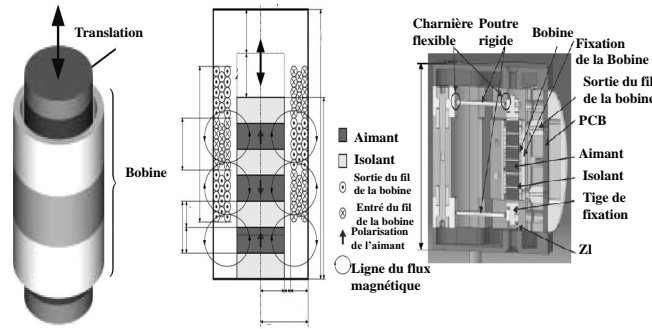


FIGURE 1.19 – Générateur électromagnétique développés par von Büren et Tröster [53]

Dans le même contexte, Apo et Priya [2] ont proposé une comparaison entre les trois récupérateurs (Figure 1.20). Le premier récupérateur est composé d'un aimant oscillant entre deux aimants fixes, le deuxième est composé de deux aimants collés et à pôle opposé en lévitation entre deux aimants fixes et le troisième est composé de trois aimants collés comme illustré dans la Figure 1.20. Ils ont constaté que la troisième configuration est la meilleure pour la récupération d'énergie.

Les récupérateurs électromagnétiques de mouvement rotatif ont l'avantage de récupérer l'énergie de manière fiable, d'avoir une petite taille et peut fonctionner à des amplitudes d'excitations de vitesse et de déplacement assez importantes. Cependant, l'utilisation de ces récupérateurs exige l'introduction d'un mécanisme de transmission de mouvement pour récupérer de l'énergie et convertir le mouvement linéaire en mouvement rotatif.

Choi et al. [54] ont utilisé le mécanisme de pignon-crémaillère pour changer le mouvement linéaire de l'amortisseur en rotation pour récupérer l'énergie, comme le montre la Figure 1.21. La particularité de ce récupérateur réside dans le fait que le générateur électromagnétique ne tourne que dans un seul sens et permet d'obtenir directement une tension continue sans utiliser des redresseurs. Le mécanisme de vis à billes est utilisé pour transformer le mouvement linéaire

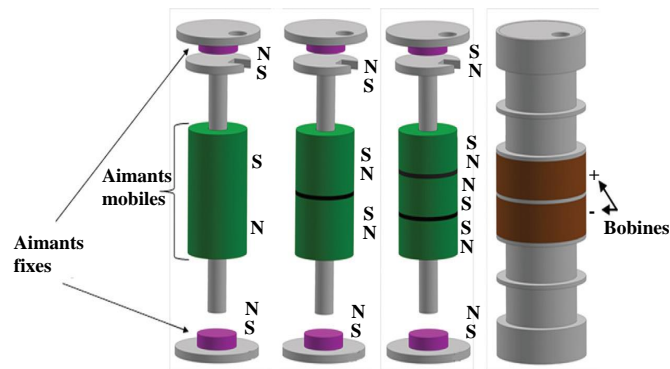


FIGURE 1.20 – Générateur électromagnétique développé par Apo et Priya [2]

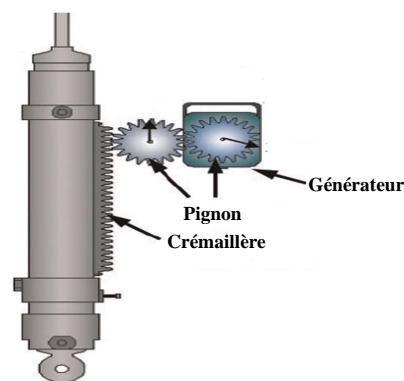


FIGURE 1.21 – Générateur électromagnétique développé par Choi et al. [54]

en un mouvement de rotation ce qui permet de récupérer l'énergie à travers un récupérateur électromagnétique rotatif. Kawamoto et al. [55] ont proposé un récupérateur électromécanique constitué d'un générateur rotatif et d'un mécanisme de vis à billes, comme l'illustre la Figure 1.22.

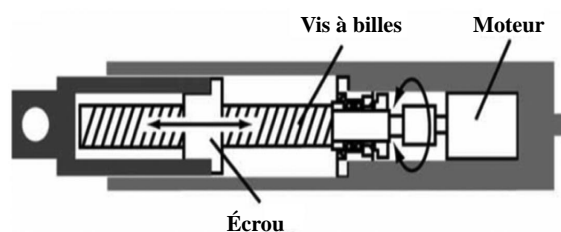


FIGURE 1.22 – Générateur électromagnétique développé par Kawamoto et al. [55]

1.5 Circuits de récupération d'énergie

Généralement, les circuits électroniques de puissance pour la récupération d'énergie sont constitués d'un redresseur, d'un onduleur convertisseur DC-DC, et d'un dispositif de stockage d'énergie ou de raccordement avec le réseau de l'onduleur, comme le montre la Figure 1.23. Les circuits électroniques de puissance ont quatre fonctions principales :

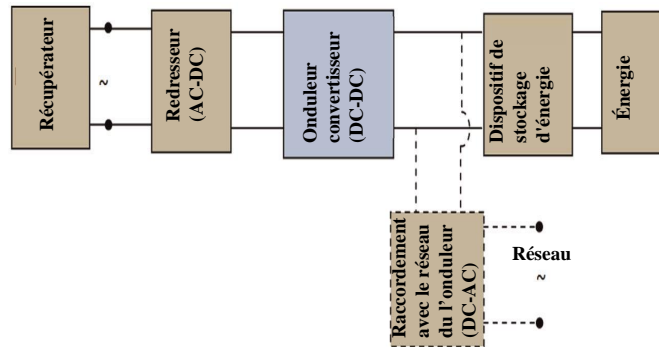


FIGURE 1.23 – Circuit électronique de puissance pour la récupération d'énergie vibratoire.

- Fonction 1 : la régulation de la puissance récupérée à partir d'une tension alternatif (AC) vers une tension continue (DC) pour qu'elle soit adaptée à un dispositif de charge ou de stockage d'énergie.

- Fonction 2 : l'amélioration de l'efficacité de récupération d'énergie obtenue par le choix des paramètres optimaux. En effet, l'utilisation des circuits électroniques de puissance avec des paramètres contrôlables conduit à l'amélioration de l'efficacité énergétique à travers l'adaptation du circuit avec l'évolution de certains paramètres en fonction du niveau de vibration ou de charge externe [56,57].

- Fonction 3 : le contrôle des vibrations est adopté par un contrôle semi-actif ou actif.

- Fonction 4 : le contrôle du flux d'alimentation.

1.5.1 Convertisseur de tension AC-DC

Le courant produit par le récupérateur d'énergie de vibration est généralement un courant alternatif. Ce courant ne peut pas alimenter les appareils électroniques ou le réseau d'alimentation directement. Pour cela, on utilise un redresseur conventionnel, il est constitué de quatre diodes pour modifier le courant alternatif en courant continu. Cependant, le rendement du redresseur conventionnel est faible à cause de la consommation d'énergie parasite et de la chute de tension des diodes. D'autre part, plusieurs chercheurs ont proposé d'autres systèmes plus efficaces pour redresser le courant. Parmi eux, le convertisseur AC-DC doubleur de tension pour les récupérateurs d'énergie piézoélectriques [58]. Ce convertisseur fait une amélioration de 94% de puissance récupérée par rapport au convertisseur conventionnel.

1.5.2 Régulateurs de tension

Les récupérateurs piézoélectriques génèrent une haute tension avec un courant relativement bas. Par contre, les générateurs électromagnétiques génèrent une basse tension inférieure à la tension d'accumulateur d'énergie.

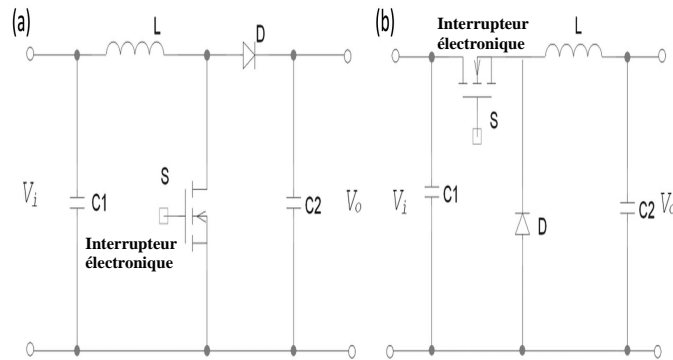


FIGURE 1.24 – Convertisseur DC-DC : (a) Convertisseurs amplificateur (b) Convertisseurs abaisseur

De plus, le courant et la tension varient avec l'amplitude de vibration. Les convertisseurs continu-continu (DC-DC) sont utilisés pour régler ou réduire la tension pour le stockage d'énergie. Les convertisseurs amplificateur [59–61], les convertisseurs abaisseurs [56,57] et les convertisseurs flyback [62] sont largement utilisés. Les topologies de convertisseur amplificateur et abaisseur sont présentées dans la Figure 1.24.

Les condensateurs ont des mémoires temporaires pour lisser la tension. La fréquence de commutation du convertisseur est généralement plus élevée que la fréquence de vibration. Par conséquent, à travers l'utilisation de la modulation de largeur d'impulsion (PWM), l'entrée et la sortie de la tension peuvent être contrôlées en temps réel par l'intermédiaire du commutateur électronique.

1.5.3 Le contrôle de la force

A cause du couplage entre le système mécanique et les circuits d'interfaces, ces derniers ont une influence sur l'efficacité énergétique et sur la dynamique du système mécanique. Cette interaction a été étudiée pour l'atténuation des vibrations passive ou semi-active en utilisant les transducteurs piézo-électriques ou les transducteurs électromagnétiques. Il est possible de contrôler la récupération d'énergie à travers la commande du circuit de récupération en ajustant le cycle de fonctionnement du convertisseur continu-continu ou bien le redresseur synchrone [63,64].

1.5.4 Contrôle bidirectionnel du flux d'énergie

La protection de systèmes mécaniques et des personnes au cours de vibration est une priorité dans la plupart des systèmes de récupérations d'énergie. Lorsque le flux de puissance est

bidirectionnel, le contrôle actif pour la récupération d'énergie ou le contrôle actif auto-alimenté est important pour des nombreuses applications de récupération d'énergie.

Divers convertisseurs DC-DC bidirectionnelles ont été développés comme interface entre les dispositifs de stockage d'énergie et les dispositifs de source d'énergie [65–68]. Ces technologies électroniques sont utilisées pour le flux d'énergie bidirectionnel dans les véhicules hybrides, les piles à combustible et le stockage d'énergie de batterie. L'utilisation de deux convertisseurs unidirectionnels indépendants permet le transfert de la puissance d'une manière bidirectionnelle. De plus, ces convertisseurs bidirectionnels sont plus compacts s'il y a un nombre faible des composants. Les convertisseurs DC-DC bidirectionnels peuvent être classés en deux types : isolées et non isolées. Les convertisseurs bidirectionnels non isolés DC-DC offrent une structure simple, une efficacité élevée, un coût faible et une haute fiabilité. Ainsi, ces convertisseurs sont issus des topologies unidirectionnelles de base tels que le convertisseur en demi-pont, le convertisseur Cuk, et le convertisseur SEPIC [69, 70]. Le convertisseur abaisseur traditionnel bidirectionnel en demi-pont est représenté sur la Figure 1.25. Lorsque le courant circule à partir du côté haute tension (côté gauche) le convertisseur fonctionne comme un convertisseur abaisseur de tension lorsque le courant circule du côté basse tension (côté droit), le convertisseur fonctionne comme un amplificateur.

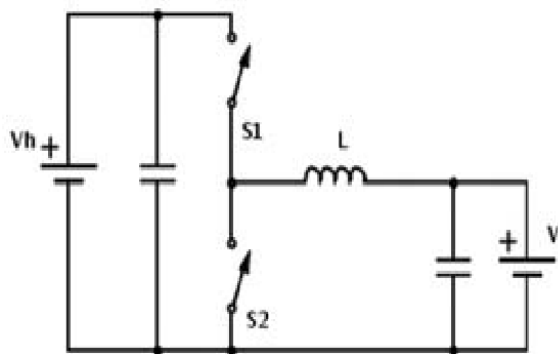


FIGURE 1.25 – Convertisseur DC-DC bidirectionnels non isolés : structure en demi-pont

Dans le but de protéger les circuits sensibles au bruit ou bien à haute tension, les convertisseurs DC-DC sont isolés par l'utilisation d'un transformateur qui fournit une isolation galvanique. Pour alimenter le transformateur, le courant continu est converti en courant alternatif. Après l'alimentation, le courant alternatif est converti de nouveau en courant continu, comme le montre la Figure (Fig.1.26).

Les topologies de base peuvent être utilisées pour construire des Convertisseur bidirectionnels isolées par l'addition d'un transformateur entre les deux. Le convertisseur bidirectionnel non-isolé a un prix plus bas par rapport au convertisseur isolé. Néanmoins, le convertisseur isolé donne un bon ratio de conversion (plus de 100) par rapport au convertisseur non-isolé. La fréquence du courant alternatif doit être élevée pour minimiser la taille du transformateur, le poids et le coût [71]. L'augmentation de la fréquence est limitée par le transistor de conduction et les pertes par commutation. A cause de la perte d'énergie dans les transformateurs, les convertisseurs bidirectionnels isolés DC-DC peuvent être utilisés dans les grands systèmes de récupération d'énergie à grande échelle comme les immeubles de grande hauteur.

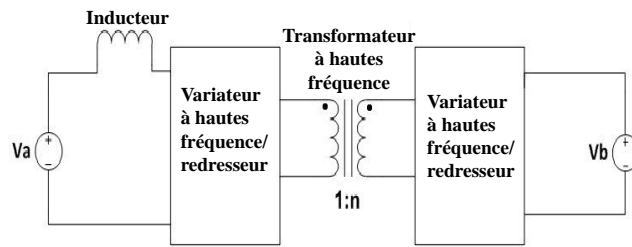


FIGURE 1.26 – Schéma du convertisseur bidirectionnel DC-DC isolé

1.6 Techniques d'amélioration de récupération d'énergie

1.6.1 Réglage manuelle

Transducteurs piézoélectriques

On peut régler la fréquence de résonance du récupérateur d'énergie en modifiant la raideur ou la masse. Couramment, il est plus pratique de modifier la rigidité au lieu de la masse. Dans ce contexte, Leland et Wright, Hu et al. et Eichhorn et al. [72–74] ont proposé l'application d'une précontrainte axiale pour modifier la rigidité du dispositif et pour régler la fréquence de résonance. De même, Leland et Wright [72] ont appliqué une charge de compression axiale sur le récupérateur d'énergie composé d'une poutre bimorphe simplement appuyée (Figure 1.27).

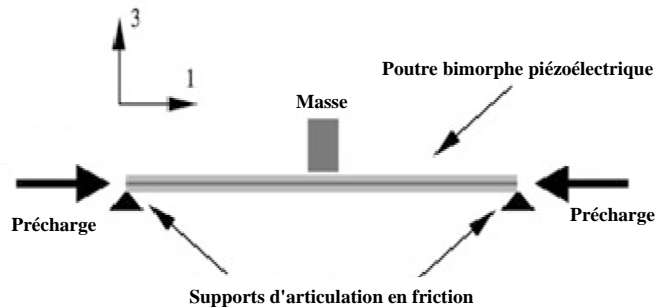


FIGURE 1.27 – Schéma d'une poutre bimorphe simplement appuyée. [72]

Ce générateur fonctionne en mode passif, où la précontrainte est réglée manuellement. Eichhorn et al. [74] ont développé une poutre en porte-à-faux qui permet la récupération d'énergie en réglant la fréquence de résonance par l'application d'une précontrainte à son extrémité libre. Analytiquement, Hu et al. [73] ont développé les équations d'une poutre piézoélectrique en porte à faux avec une précontrainte axiale. La fréquence de résonance peut être ajustée à travers l'effort de traction ou à travers la charge de compression.

Au lieu d'utiliser le mode de flexion, certains auteurs ont proposé un dispositif de récupération d'énergie ajustable qui travaille en mode d'extension, appelée (extensional mode resonator)

(XMR) [75, 76], comme le montre la Figure 1.28. Ce résonateur ajustable présenté par Morris et al. [75] a été formé en mettant en suspension une masse sismique sur les deux membranes piézo-électriques. Une recherche similaire a été poursuivie par Loverich et al. [77], dans laquelle la résonance peut être ajustée en réglant la précontrainte de la plaque circulaire.

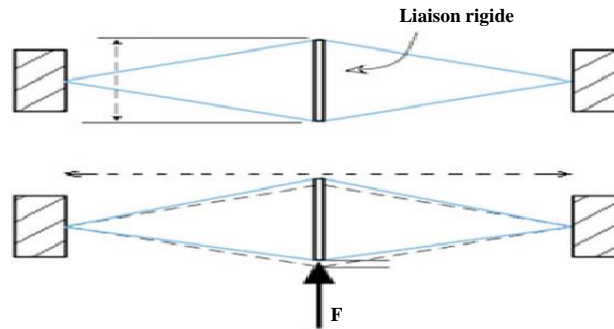


FIGURE 1.28 – Schéma d'un récupérateur XMR avec deux membranes précontraintes par une liaison rigide. [75, 76]

L'ajustement du centre de gravité de la masse est une autre solution pour faire varier la fréquence de résonance. Pour cela, Wu et al. [78] ont développé un récupérateur dans lequel la masse sismique est composée d'une partie fixe et d'une partie mobile, comme le montre la Figure 1.29.

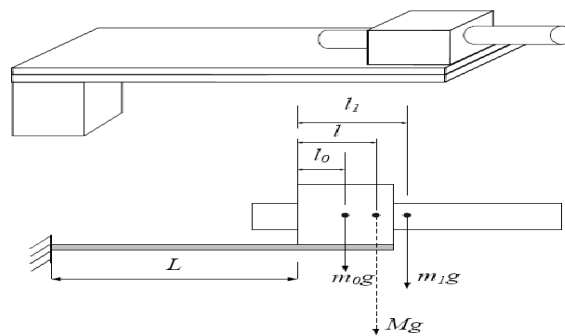


FIGURE 1.29 – Récupérateur piézo-électrique avec une masse mobile. [78]

Transducteurs piézoélectriques en interaction avec une force magnétique

L'application d'une force magnétique permet de modifier la rigidité du récupérateur ce qui permet de régler la fréquence de résonance. Dans ce contexte, [79] ont proposé un récupérateur composé d'une poutre en porte-à-faux, dans lequel deux aimants sont fixés à l'extrémité libre de la poutre, tandis que les deux autres aimants sont fixés en haut et en bas du boîtier du dispositif, comme représenté sur la Figure 1.30.a. Tous les aimants sont alignés verticalement de sorte que les forces magnétiques attractives ou répulsives peuvent être générées de chaque côté de la

poutre. En outre, la puissance de sortie est faible à cause de l'augmentation de l'amortissement au cours de la procédure de réglage (Figure 1.30.b). La distance maximale de réglage du gap est de 3 cm. De même, ce générateur ne peut fonctionner que lorsque la fréquence d'excitation est constante.

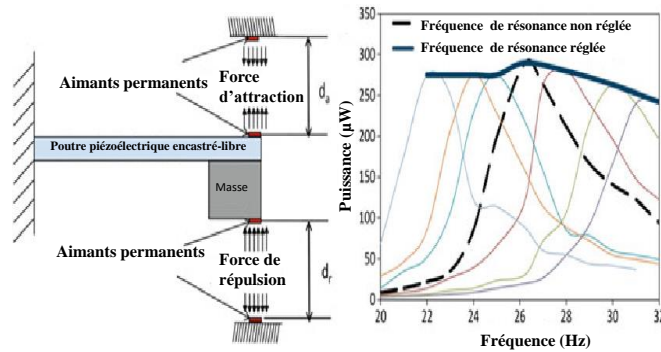


FIGURE 1.30 – (a) Générateur (b) Puissance de sortie en fonction de la fréquence. [79]

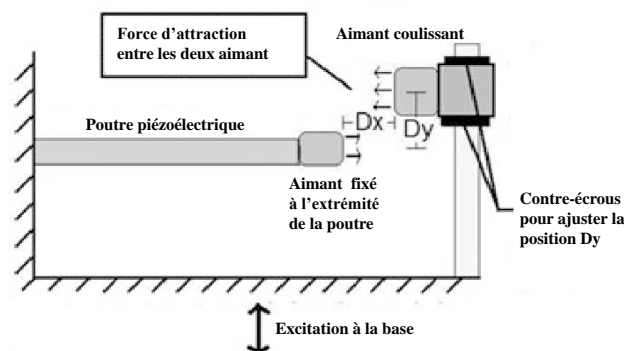


FIGURE 1.31 – Schéma proposé Reissman et al. [80] pour ajuster la fréquence de résonance pour la récupération d'énergie.

Reissman et al. [80] ont développé une technique de réglage de la fréquence de résonance en variant la force d'attraction magnétique, comme représenté dans la Figure 1.31. La fréquence de résonance du récupérateur d'énergie piézoélectrique pourrait être réglée d'une manière bidirectionnelle en réglant la position de l'aimant fixe sur un coulisseau.

1.6.2 Réglage automatique

Transducteurs piézoélectriques

Le réglage manuel de la fréquence de résonance n'est pas favorable pendant le fonctionnement du récupérateur. Pour résoudre ce problème, Wu et al., Peters et al. et Gu et Livermore [81–84] ont développé des récupérateurs automatiques et passifs.

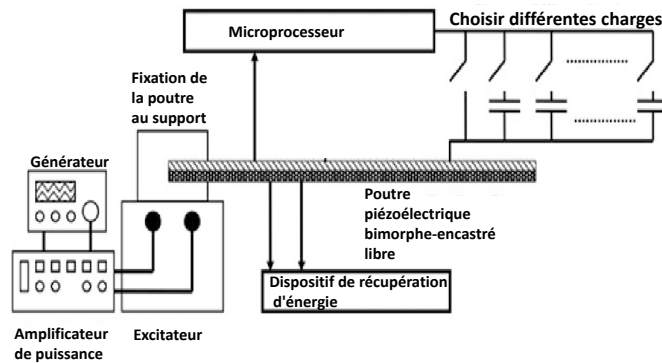


FIGURE 1.32 – Montage expérimental pour l'ajustement de la fréquence de résonance. [81]

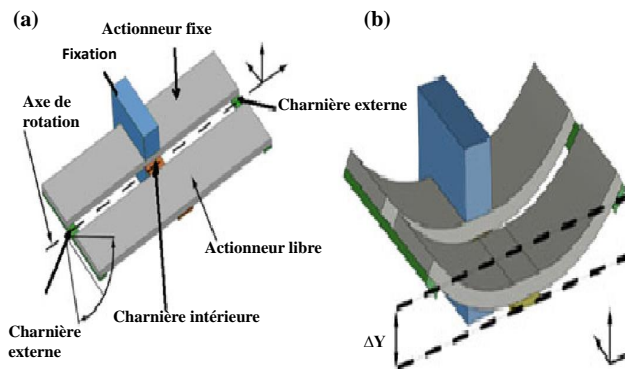


FIGURE 1.33 – (a) Récupérateur à paramètre ajustable (b) Déviation ΔY suite à une tension de réglage. [82]

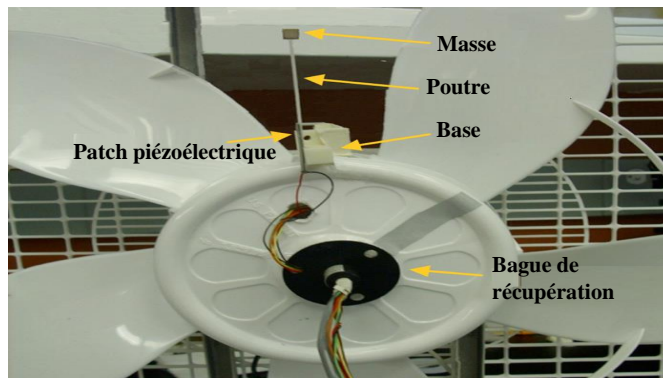


FIGURE 1.34 – Montage expérimental pour la récupération d'énergie à partir de vibrations de rotation. [83]

Wu et al. [81] ont présenté un générateur piézo-électrique bimorphe dans lequel la couche supérieure piézoélectrique est raccordée à différentes charges capacitives pour régler la fréquence de résonance. La couche inférieure est utilisée pour récupérer l'énergie comme le montre la Figure 1.32. Le microcontrôleur a été utilisé pour déterminer la fréquence extérieure et pour ajuster la charge capacitive. En d'autres termes, le dispositif est réglé activement. Peters et

al. [82] ont proposé un résonateur ajustable par la rigidité mécanique et donc la fréquence de résonance peut être ajustée grâce à deux actionneurs piézoélectriques. L'actionneur pivote autour de l'axe libre de rotation avec un angle de déviation α , comme le montre la Figure 1.33.a. En appliquant une tension sur les actionneurs, leurs deux extrémités sont déformées d'une quantité ΔY . Cette déformation provoque un moment supplémentaire et donc une structure plus rigide.

Gu et Livermore [83] ont proposé un récupérateur d'énergie axé sur le mouvement de rotation. Un autoréglage passif sur le récupérateur d'énergie piézoélectrique est conçu, dans lequel la force centrifuge est exploitée pour ajuster la rigidité et donc la fréquence de résonance. Le récupérateur est composé d'une poutre en porte-à-faux orientée radialement et montée sur un corps en rotation, comme représenté sur la Figure 1.34. Le mécanisme de récupération peut atteindre une bande passante plus large de 8.2 Hz en le comparant au mécanisme non réglé de 0,61 Hz. Le récupérateur piézo-électrique est utilisé en tant qu'actionneur pour modifier la raideur du système. Jo et al. [84] ont présenté un mécanisme composé d'un couple de poutre en porte-à-faux avec différentes longueurs. Ce dernier est mobile latéralement et contient deux phases opérationnelles. Les forces d'inertie sont exercées horizontalement par deux masses sismiques et ces forces deviennent maximales lorsque la fréquence d'excitation correspond à la fréquence de résonance. Ce récupérateur est autonome et aucune puissance n'est requise dans la procédure de réglage.

Transducteurs piézoélectriques en interaction avec une force magnétique

Le réglage de la fréquence de résonance du récupérateur de Zhu et al. [85] se fait automatiquement. Le schéma du mécanisme de réglage est représenté par la Figure 1.35. Le micro-contrôleur contrôle périodiquement et détecte la tension de sortie du générateur et donne des instructions à l'actionneur linéaire pour régler la distance D entre les deux aimants. Les mêmes auteurs ont remarqué que le mécanisme de réglage n'affecte pas l'amortissement du générateur sur toute la gamme de réglage. Cependant, si la force de réglage devient plus grande que la force d'inertie, l'amortissement augmente et la puissance de sortie diminue. L'inconvénient de ce système de commande, est qu'il détecte la fréquence de résonance en comparant la tension de sortie avec un seuil prédéfini. Ainsi, ce système peut être inefficace à cause du changement de la fréquence ou de l'amplitude d'excitation.

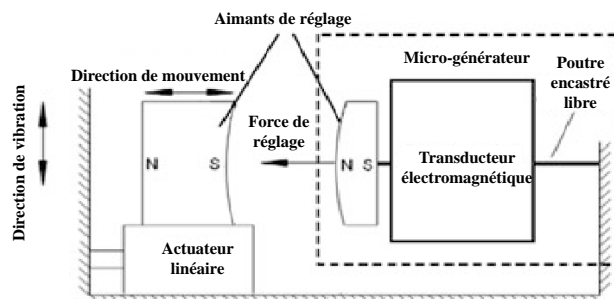


FIGURE 1.35 – Schéma du mécanisme de réglage. [85]

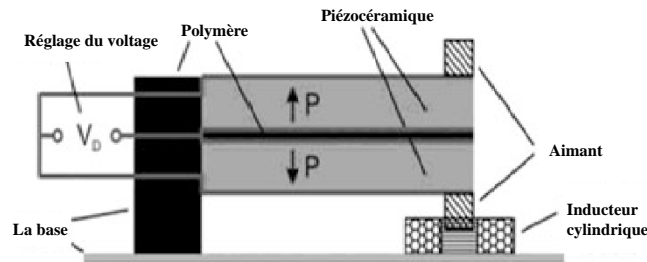


FIGURE 1.36 – Schéma du mécanisme de réglage. [86]

Wischke et al. [86] ont développé un récupérateur électromagnétique ajustable dont la fréquence de résonance est réglée de manière "semi-passive". La Figure 1.36 montre le schéma de ce récupérateur. Lorsque la tension de réglage est déconnectée, la fréquence s'éloigne de la valeur initiale ajustée. Cette variation est importante pour les hautes tensions de contrôle (> 130 V). La charge doit être actualisée périodiquement pour maintenir la fréquence de résonance souhaitée. Par conséquent, le mécanisme de réglage est défini comme "semi-passif". Donc, la fréquence ajustée reste constante après la coupure de la tension de commande.

1.6.3 Configuration multimodale linéaire

Transducteurs piézoélectriques

Plusieurs auteurs ont développé les récupérateurs d'énergie à plusieurs degrés de liberté (n ddl). Ainsi, l'un des modes de vibration du générateur peut être excité lorsque la fréquence d'excitation se rapproche de la fréquence naturelle associée au mode excité. Si plusieurs modes de récupération d'énergie sont utilisés, la puissance utile peut être récupérée avec une bande passante plus large. Cette technique s'appelle "récupération d'énergie multimodale." Pour un système à deux degrés de liberté, la bande passante peut être définie par la Figure 1.37 :

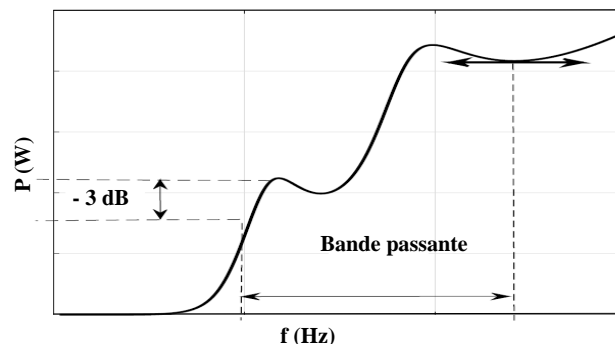


FIGURE 1.37 – Définition de la bande passante

Plusieurs études théoriques ont été menées afin d'exploiter les modes d'un corps rigide en

translation ou en rotation [87] ou les systèmes en translation avec plusieurs modes à paramètres localisés [24, 88] pour récupérer l'énergie multimodale. Toutefois, les récupérateurs d'énergie multimodale sont habituellement mis en œuvre à travers l'exploitation de plusieurs modes d'une poutre continue en flexion ou par un réseau des poutres encastées libres. [5] ont proposé un système multi-ddl comprenant plusieurs masses attachées sur une poutre encastée-encastée pour avoir une bande passante plus large. La plupart des études publiées dans la littérature exploitent un récupérateur multimodal avec une configuration de poutre encastée libre, dans lequel les deux premiers modes de flexion ont été utilisés. [89] ont modélisé une poutre en porte-à-faux à deux masses pour la récupération d'énergie large bande. Les deux modes sont situés à 26 Hz et 174 Hz.

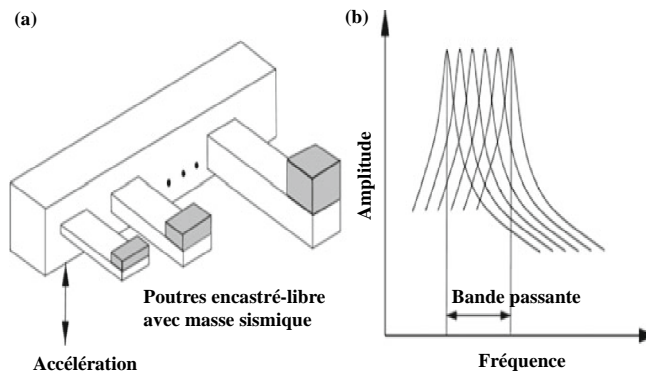


FIGURE 1.38 – (a) Filtre passe-bande (b) Fonction de transfert du filtre. [4]

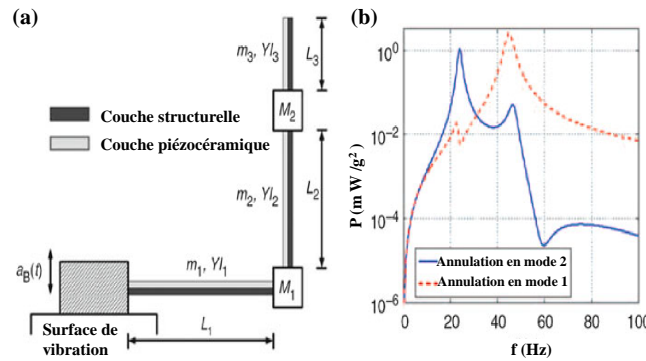


FIGURE 1.39 – (a) Schéma du récupérateur piézoélectrique en forme L. (b) Réponse en puissance. [90]

Le réseau des poutres développé par Yang et Yang (2009) et Kim et al. [92, 93], est généralement quasi découplé. Chaque poutre en porte-à-faux est considérée comme une sous-structure du générateur et par conséquent le premier mode de chaque poutre est l'un des modes du dispositif de récupération. Shahrzad [4] a conçu un récupérateur d'énergie composé de poutres piézoélectriques encastées libres de différentes longueurs et des masses sismiques à leur extrémité attachées à une base commune (Figure 1.38.a). Ce récupérateur vibre à différentes fréquences en sélectionnant correctement la longueur et l'extrémité de la masse de chaque poutre ce qui

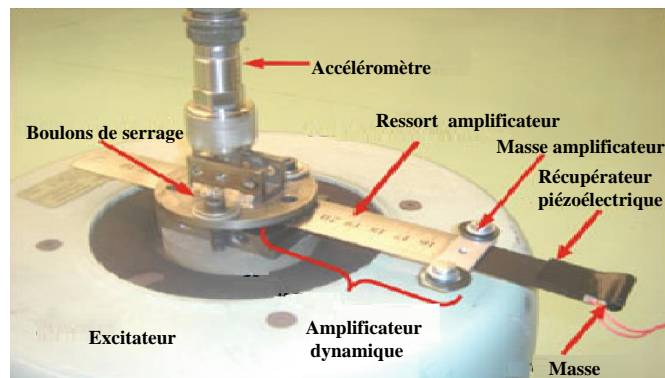


FIGURE 1.40 – Récupérateur d'énergie piézoélectrique avec amplificateur dynamique. [91]

permet de fournir la réponse de tension sur une large gamme de fréquences (Figure 1.38.b). Cette combinaison des poutres en porte à faux dans un dispositif s'appelle un "filtre mécanique passe-bande".

Erturk et al. [90] ont développé une poutre piézoélectrique encastrée libre sous forme de L pour exploiter la récupération d'énergie multimodale, comme illustre la Figure 1.39.a. À travers un choix adéquat des paramètres, la deuxième fréquence de résonance est environ le double de la première, comme indique la Figure 1.39.b. Cependant, leur objectif consiste à éviter le mode qui permet d'annuler la tension. Pour le cas des trois poutres piézoélectriques combinées en série, le voltage sera annulé pour le deuxième mode de résonance. La modification de la couche piézoélectrique du premier tronçon permet d'éviter l'annulation du voltage pour le second mode de résonance. Ainsi, un circuit d'interface plus sophistiqué est nécessaire pour délivrer l'énergie séparément afin de pas annuler la tension. Arafa et al. [91] ont présenté un récupérateur d'énergie à 2ddl composé d'une poutre piézoélectrique encastrée libre dans lequel la masse sismique fonctionne comme un amplificateur dynamique (Figure 1.40).

Transducteurs électromagnétiques

Sari et al. [94] ont développé un récupérateur d'énergie en utilisant l'induction électromagnétique. Le dispositif est composé de 35 poutres encastrées libres de différentes longueurs.

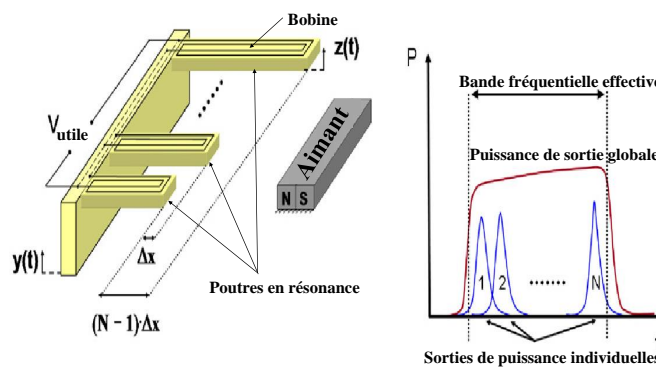


FIGURE 1.41 – Générateur développé par [94]

Ce générateur génère une puissance continue de l'ordre de $0,4\mu\text{W}$ et une tension de l'ordre de 10 mV, couvrant une bande fréquentielle entre 4.2 et 5 kHz, (Figure 1.41). De même, Yang et al. [95] ont proposé un récupérateur électromagnétique comprenant plusieurs aimants attachés sur une poutre encastrée-encastrée pour avoir une bande passante plus large.

Transducteurs piézoélectriques en interaction avec une force magnétique

Tadesse et al. [96] ont présenté un générateur composé d'une poutre encastrée libre intégrée dans le cadre d'un dispositif de récupération d'énergie hybride. Le récupérateur est composé d'une poutre en porte à faux avec des patches piézoélectriques collés et un aimant permanent fixé sur leur extrémité, qui oscille dans une bobine stationnaire fixée au boîtier, comme l'illustre la Figure 1.42.

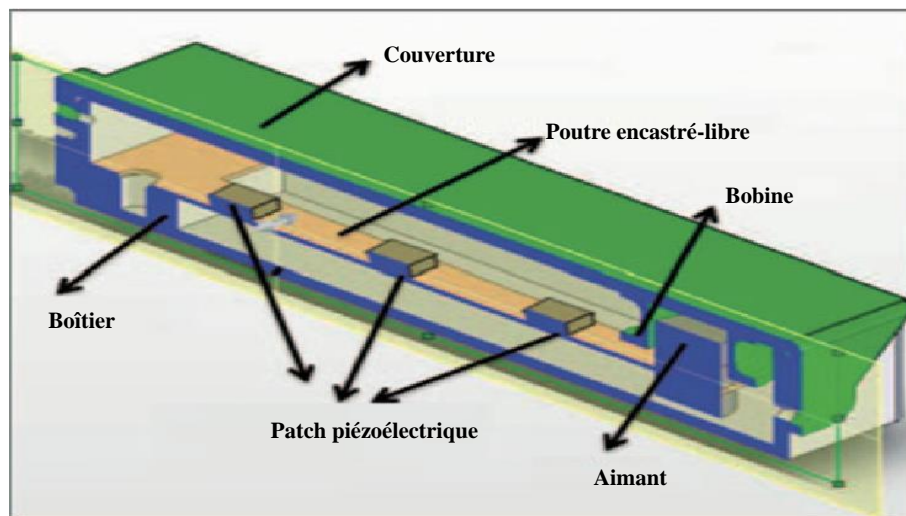


FIGURE 1.42 – Schéma du dispositif de récupération d'énergie multimodale. [96]

Le système électromagnétique génère une puissance de sortie importante pour le premier mode, tandis que le générateur piézoélectrique n'est efficace que pour le second mode. Cependant, la première et la seconde fréquence de résonance du dispositif sont éloignées l'une de l'autre (20 Hz et 300 Hz). La largeur de la bande effective discrète n'est pas utile que lorsque le spectre de fréquence de la source de vibration est assez large. La taille de la bande passante peut présenter un autre inconvénient car l'aimant permanent est généralement difficile à réduire.

1.6.4 Configuration non linéaire

Transducteurs piézoélectriques

D'après la littérature, la non-linéarité des récupérateurs d'énergie est considérée à partir du couplage piézo-électrique non linéaire [97, 98]. Ce couplage non linéaire résulte du processus de fabrication du matériau piézo-électrique, cette rigidité non linéaire est relativement facile à réaliser et à contrôler. L'amortissement causé par la piézoélectricité ne peut pas être modélisé sous la forme d'un amortisseur visqueux et doit être modifiée en ajoutant un terme de couplage. Autrement que l'oscillateur non linéaire du type à Duffing, certains auteurs ont exploité

la raideur linéaire par morceaux pour augmenter la largeur de bande du récupérateur d'énergie. L'utilisation d'une butée mécanique est un moyen standard pour réaliser une rigidité linéaire par morceau [99–101]. La configuration typique du récupérateur d'énergie de vibration composé d'une butée mécanique et d'une rigidité linéaire par morceau (non linéaire) est illustrée par la Figure 1.43.

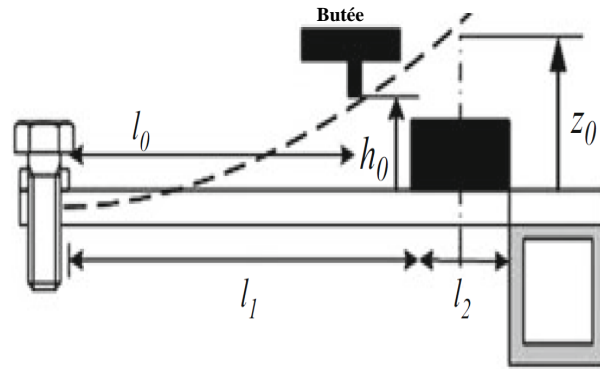


FIGURE 1.43 – Configuration d'un récupérateur d'énergie typique avec stoppeur mécanique [100].

Transducteurs électromagnétiques

Mann et Sims [1] ont proposé un récupérateur d'énergie électromagnétique en oscillations non linéaires en raison de la lévitation magnétique. Pour une faible excitation à la base, la réponse en fréquence (Figure 1.44.a) est similaire à la réponse d'un système linéaire. Néanmoins, dans le cas d'une excitation élevée, le comportement non linéaire est fortement raidissant (Figure 1.44.b). Les deux expériences et leurs analyses théoriques prennent en considération le phénomène de saut proche de la première fréquence de résonance, comme l'indique la Figure 1.44.b. Toutefois, ce générateur élargit seulement la réponse en fréquence dans une seule direction (le déplacement de la réponse de crête vers la droite).

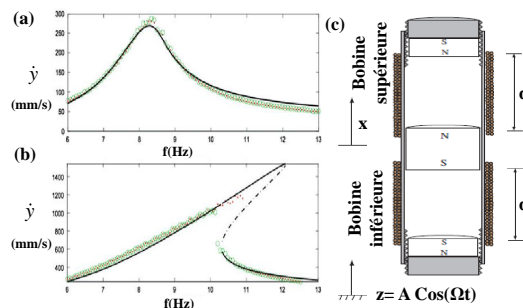


FIGURE 1.44 – Résultats théoriques (ligne noire) et Résultats expérimentaux avec balayage en fréquence dont les deux sens (vers l'avant (points rouges) et inversement (cercles verts)). [1]

Transducteurs piézoélectriques en interaction avec une force magnétique

Stanton et al. [102] ont proposé un dispositif monostable pour récupérer l'énergie en utilisant l'effet piézoélectrique.

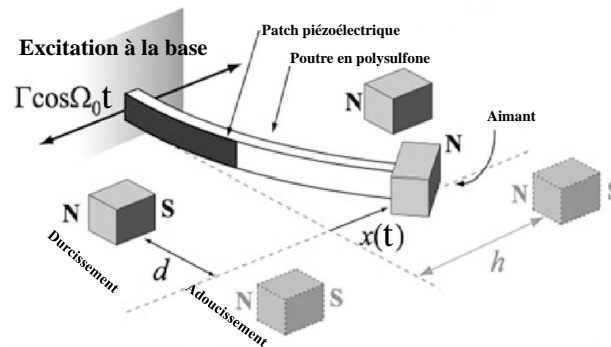


FIGURE 1.45 – Schéma du dispositif de récupération d'énergie non-linéaire. [102]

L'appareil est composé d'une poutre piézo-électrique liée à son extrémité à un aimant, ce qui permet d'avoir une interaction magnétique avec les champs magnétique des aimants fixes de polarités opposées, comme le montre la Figure 1.45. Le système est modélisé par une équation électromécanique couplée de Duffing. Le réglage des interactions magnétiques non-linéaires à travers l'aimant à l'extrémité (Suite au réglage de la distance du gap d), peut produire un comportement raidissant ou assouplissant, comme le montre la Figure 1.45, ce qui permet d'élargir la bande passante fréquentielle d'une manière bidirectionnelle.

1.7 Conclusion

La récupération d'énergie a été développée dans plusieurs études de la littérature depuis plus qu'une décennie. Elle permet d'utiliser ces générateurs dans de multiples applications intéressantes tels que les capteurs sans fil et les appareils électroniques. Dans ce chapitre, nous avons rappelé d'abord la récupération d'énergie vibratoire à partir de suspensions de véhicules, des structures de génie civil, des voies de chemin de fer, des vagues d'océan, et à partir des mouvements humains. De même, nous avons présenté les caractéristiques des transducteurs piézo-électriques, des transducteurs électromagnétiques et les circuits électroniques de puissance.

L'inconvénient majeur des récupérateurs d'énergie linéaire est leur bande passante étroite, ce qui limite l'application de ces générateurs linéaires lorsque la source de vibration ambiante a une fréquence de fonctionnement qui varie d'une manière aléatoire. Nous avons présenté les succès récents sur les techniques de récupération d'énergie à large bande. Par exemple, les techniques de réglage manuel ou automatique de la fréquence de résonance, l'approche multimodale et l'exploitation des non-linéarités. Chaque technique est liée à des conditions spécifiques d'application. Le bon choix de la technique la plus appropriée pour la récupération d'énergie à partir des vibrations à large bande fréquentielle, exige une information sur le type et l'amplitude d'excitation et la gamme de variation de la fréquence. Il est encore possible de combiner

ces techniques pour avoir une meilleure récupération d'énergie qui peut être utilisée dans des applications industrielles ainsi que dans la vie quotidienne.

Notre étude sera focalisé par la suite de ce mémoire sur l'amélioration des performances de récupérateurs d'énergie vibratoires hybrides piézoélectrique-électromagnétique non-linéaire

Chapitre 2

Méthodes de résolution des problèmes de la dynamique non-linéaire

2.1 Introduction

Généralement un problème de dynamique est modélisé sous une forme mathématique. Les équations qui en résultent peuvent être linéaires ou non linéaires. La solution exacte de ces équations ne peut pas être obtenue directement. Pour cela, des méthodes de résolution analytiques, numériques ainsi que la combinaison entre ces deux types des méthodes ont été développées. Parmi ces méthodes de résolution, nous citons : la méthode de perturbation à échelles de temps multiples, la méthode d'intégration temporelle (directe, Shooting,...), les méthodes de continuation et la méthode de la balance harmonique. De plus, pour avoir une solution optimale avec un minimum de calcul, plusieurs chercheurs ont proposé des études à l'aide des algorithmes de sensibilité. Ces études conduisant à la réduction des paramètres à optimiser. Les études de sensibilité peuvent être effectuées a priori (cas déterministe) ou bien a posteriori (cas aléatoire). L'application des algorithmes d'optimisation peuvent de générer le front Pareto optimal. Ainsi, le concepteur trouve une bonne souplesse pour choisir la solution qui lui convient le mieux. Dans ce chapitre, nous commençons par la présentation des méthodes de résolution des équations différentielles non linéaires. Ensuite, une comparaison entre les différentes méthodes de résolution non linéaire pour le cas d'un seul ou plusieurs degrés de libertés est effectuée. De même, les méthodes de sensibilité sont présentées suivie de la stratégie d'optimisation multiobjectif.

2.2 Méthode de perturbation à échelles de temps multiples

Dans ce paragraphe, nous décrivons les étapes de la méthode de perturbations à échelles de temps multiples [103, 104]. L'idée maitresse de cette méthode est de remplacer la variable temporelle par une suite infinie d'échelles de temps indépendantes. Elle est utile dans une variété de situations pour extraire la dépendance temporelle des modèles ou des systèmes. Cependant, les conditions de résolution sont connues et garantissent l'élimination des termes séculaires pour la première variable rapide $T_0 = T$. Ce qui impose une faible contrainte de résolution et donne une solution approchée. De plus, la solution devient de plus en plus cohérente lorsqu'on augmente l'ordre de l'expansion et la contrainte de résolution devient plus importante. Cette

exigence augmente la difficulté de résolution ce qui limite la liberté de choix des amplitudes des termes de résonance qui apparaissent à chaque ordre de l'expansion. Si on ne respect pas les contraintes, la résolution de l'équation peut conduire à des solutions erronées ou des solutions triviales. Par conséquent, cette méthode est limitée à une catégorie de systèmes dynamiques comme l'oscillateur harmonique simple avec une conservation de l'énergie. Cette méthode peut déterminer la dépendance de la solution seulement pour la première variable faible ($T_1 = \varepsilon t$). La dépendance aux échelles de temps plus élevée ($T_n = \varepsilon^n t$, $n \geq 2$) ne peut pas être déterminée directement par cette méthode et doit être résolue par le choix des données initiales appropriées (comme $T_1 = 0$) ou bien en imposant des contraintes supplémentaires.

Pour un oscillateur à un seul degré de liberté forcé, la résolution de l'équation de Duffing (2.1) par la méthode des échelles multiples passe par les étapes suivantes :

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon c \dot{x} + \varepsilon \beta x^3 = \varepsilon Q e^{i\Omega t} \quad (2.1)$$

On pose : $x = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j x_j(t)$; $T_j = \varepsilon^j t$; $\Omega = \omega + \varepsilon \sigma$. σ est un paramètre de réglage. On se limite au développement à l'ordre 1 d'où :

$$x = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) \quad (2.2)$$

Lorsqu'on dérive par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) + \dots \\ &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Lorsque nous substituons les équations (2.3) et (2.4) dans l'équation (2.1), nous obtenons :

Ordre 0 :

$$D_0^2 x_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (2.5)$$

Ordre 1 :

$$D_0^2 x_1 + \omega^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - \beta x_0^3 - c D_0 x_0 + \frac{1}{2} Q e^{i(wT_0 + \sigma T_1)} \quad (2.6)$$

La solution de l'équation à l'ordre 0 est donnée comme suit :

$$x_0(T_0, T_1) = Y(T_1) e^{i\omega T_0} + Y^*(T_1) e^{-i\omega T_0} \quad (2.7)$$

Avec Y^* est le conjugué de Y . Le développement de l'équation (2.7) à l'ordre 1 est donné comme suit :

$$D_0^2 x_1 + w^2 x_1 = -2iw(Y'(T_1)e^{iwT_0} - Y^*(T_1)e^{-iwT_0}) - \beta(Y(T_1)e^{iwT_0} + Y^*(T_1)e^{-iwT_0})^3 - ciw(Y(T_1)e^{iwT_0} - Y^*(T_1)e^{-iwT_0}) + \frac{1}{2}Qe^{i(wT_0 + \sigma T_1)} \quad (2.8)$$

On garde uniquement les expressions qui dépendent seulement de $e^{iw_i T_0}$ qu'on appelle termes séculaires résonants. L'équation précédente s'écrit comme suit :

$$D_0^2 x_1 + w^2 x_1 = -iw(2Y'(T_1) + cY(T_1))e^{iwT_0} - 3\beta Y(T_1)^2 Y^*(T_1)e^{iwT_0} + \frac{1}{2}Qe^{i\sigma T_1}e^{iwT_0} + \dots \quad (2.9)$$

En annulant les termes séculaires, l'équation (2.9) devient :

$$-iw(2Y'(T_1) + cY(T_1)) - 3\beta Y(T_1)^2 Y^*(T_1) + \frac{1}{2}Qe^{i\sigma T_1} = 0 \quad (2.10)$$

On introduit la forme polaire de l'amplitude complexe :

$$Y(T_1) = \frac{1}{2}A(T_1)e^{i\psi(T_1)} \quad (2.11)$$

Avec A et ψ respectivement l'amplitude et la phase .

$$-iw\left(A'(T_1) + i\psi'(T_1)A(T_1) + c\frac{1}{2}A(T_1)\right) - \frac{3}{8}\beta A(T_1)^3 + \frac{1}{2}Qe^{i(\sigma T_1 - \psi(T_1))} = 0 \quad (2.12)$$

On sépare la partie réelle de la partie complexe, on introduit la phase $\gamma(T_1) = -(\sigma T_1 - \psi(T_1))$, et on obtient :

$$\begin{cases} w\gamma'(T_1)A(T_1) + w\sigma A(T_1) - \frac{3}{8}\beta A(T_1)^3 + \frac{1}{2}Q\cos(\gamma(T_1)) = 0 \\ -wA'(T_1) - wc\frac{1}{2}A(T_1) - \frac{1}{2}Q\sin(\gamma(T_1)) = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{cases} A'(T_1) = -c\frac{1}{2}A(T_1) - \frac{Q}{2w}\sin(\gamma(T_1)) \\ A(T_1)\gamma'(T_1) = -\left(\sigma A(T_1) - \frac{3}{8w}\beta A(T_1)^3 + \frac{Q}{2w}\cos(\gamma(T_1))\right) \end{cases} \quad (2.14)$$

Ces équations décrivent l'évolution de l'amplitude et la phase en fonction du temps. La solution périodique de (2.14) correspond à la résolution de cette condition($A'(T_1) = \gamma'(T_1) = 0$) :

$$\begin{cases} -c\frac{1}{2}A(T_1) - \frac{Q}{2w}\sin(\gamma(T_1)) = 0 \\ \sigma A(T_1) - \frac{3}{8w}\beta A(T_1)^3 + \frac{Q}{2w}\cos(\gamma(T_1)) = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Le système d'équation (2.15) est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{Q}{w} \sin(\gamma(T_1)) = -cA(T_1) \\ \frac{Q}{2w} \cos(\gamma(T_1)) = -\sigma A(T_1) + \frac{3}{8w} \beta A(T_1)^3 \end{cases} \quad (2.16)$$

À l'ordre 1, l'amplitude A et le paramètre de réglage σ s'écrivent sous une forme paramétrique en fonction de la phase γ :

$$\begin{cases} A = -\frac{Q}{cw} \sin(\gamma) \\ \sigma = \frac{3\beta Q^2}{8w^3 c^2} \sin^2(\gamma) + \frac{c}{2} \cot(\gamma) \end{cases} \quad (2.17)$$

Suite à la résolution du système d'équation (2.17), la Figure 2.1 donne la variation de l'amplitude A en fonction de la fréquence d'excitation Ω . Cette courbe présente le phénomène de saut. La portion de la courbe de réponse entre les points A et B est instable et contient deux solutions bistables.

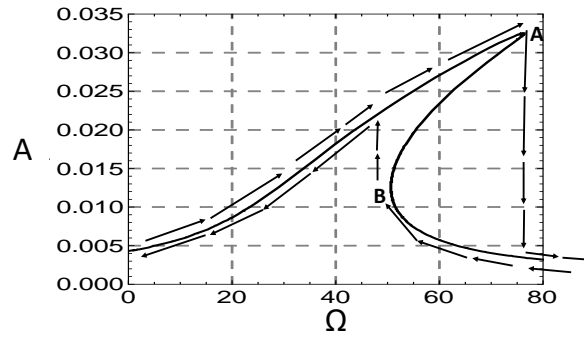


FIGURE 2.1 – Phénomènes du Saut pour la première fréquence de résonance de l'équation Duffing

Le calcul de la bande passante pour cette configuration non linéaire se fait à partir de -3db de l'amplitude maximale, comme expliqué sur la Figure 2.2.

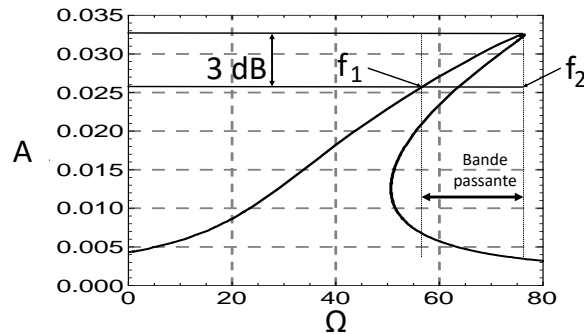


FIGURE 2.2 – Détermination de la bande passante pour un système non-linéaire à 1DDL

L'amplitude critique A_c est l'amplitude d'oscillation au-dessus de laquelle se produit la bi-stabilité [105] . Ainsi, A_c est l'amplitude de la transition entre le comportement linéaire et le

comportement non linéaire. Au niveau de l'amplitude critique, la courbe de résonance présente une pente verticale. De même, la courbe de phase présente également une pente verticale. Mathématiquement, A_c est définie comme étant l'amplitude d'oscillation pour laquelle l'équation $d\sigma/d\gamma = 0$ et admet une solution unique $\gamma_c = \pi/3$. Ainsi, la force est réduite comme suit :

$$Q = \frac{4\sqrt{2}c^{3/2}\Omega^{3/2}}{3\sqrt[4]{3}\sqrt{\beta}} \quad (2.18)$$

L'amplitude A_c critique est obtenue en substituant l'équation (2.18) dans (2.17) au point $\gamma = \pi/2$.

$$A_c = \frac{4}{3\sqrt[4]{3}} \sqrt{\frac{2c\Omega}{\beta}} \quad (2.19)$$

La Figure 2.3 donne la variation de la réponse en fréquence par rapport à l'amplitude harmonique pour le cas linéaire, le cas critique et le cas non linéaire.

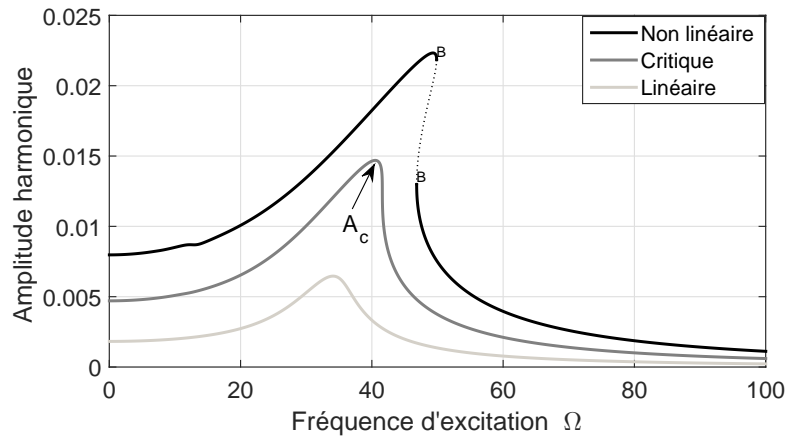


FIGURE 2.3 – Réponses forcées en fréquence de l'oscillateur à 1ddl pour les trois configurations : linéaire ($Q = 2$), critique ($Q = 5.4$) et non linéaire ($Q = 10$). Les lignes continues indiquent les solutions périodiques stables et les lignes pointillées indiquent les solutions périodiques instables.

La résolution par la méthode analytique de perturbation permet de trouver la solution plus rapidement. Mais cette réponse dépend de l'ordre de résolution. Plus l'ordre augmente, plus la solution est proche de la solution exacte et devient plus difficile à résoudre. Pour cela dans la suite, on présente les méthodes d'intégration temporelle ainsi que la méthode de la balance harmonique implémenté sous Manlab.

2.3 Méthodes d'intégration temporelle

On considère l'équation de Duffing sous sa forme simplifiée :

$$\ddot{x} + \omega^2 x + c\dot{x} + \beta x^3 = Qe^{i\Omega t} \quad (2.20)$$

Pour simplifier davantage l'équation (2.20), on pose :

$$\begin{cases} y = \dot{x} \\ \dot{y} = -\omega^2 x - c\dot{x} - \beta x^3 + Qe^{i\Omega t} \end{cases} \quad (2.21)$$

Soit : $z = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ est un vecteur qui dépend des variables x et y , on écrit l'équation (2.20) sous sa nouvelle forme :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix}^T = g(z, t) \quad (2.22)$$

Pour la résolution d'un cas général, il est impossible de trouver la solution d'une manière analytique à partir des équations (2.22) décrivant le mouvement d'un système à plusieurs degrés de liberté. Pour cela, les chercheurs ont développé des méthodes numériques dont le but d'approche la solution du problème à des temps discrets t_1, t_2, \dots, t_n .

Soit Δt est la différence ($t_n - t_{n-1}$), qui reste constante pendant le processus d'intégration. Si la fonction g est continûment différentiable par rapport à t et z sur l'intervalle d'étude, elle a une solution unique qui satisfait la première condition limite $z_0 = z(0, t)$. La première méthode pour déterminer la solution approchée discrète de (2.22) est de supposer que g est suffisamment différentiable par rapport à t et z . L'utilisation de la méthode d'approximation d'Euler et à travers la connaissance de la solution à l'étape $n - 1$ permet d'approcher cette solution à l'étape $n + 1$ de la façon suivante :

$$z_n = z_{n-1} + \Delta t \times g(z_{n-1}, t_{n-1}) \quad (2.23)$$

Plusieurs méthodes ont été utilisées pour résoudre l'équation différentielle (2.20) ; on cite par exemple la méthode explicite à plusieurs étapes, la méthode de Newmark et ses algorithmes associés, la méthode de Runge Kutta et la méthode de Shooting .

2.3.1 Méthode de Runge-Kutta

Dans la stratégie de Runge-Kutta, il est possible de développer une méthode qui correspond à la précision des ordres plus élevés de la série de Taylor en calculant successivement la fonction $g(z, t)$ (2.22) en plusieurs points dans l'intervalle de temps. Le calcul des dérivées d'ordre supérieur est remplacé par des estimations de la fonction en un certain nombre de points. Cette méthode est appelée la méthode de Runge-Kutta ou encore fonction (ode45) sous Matlab qui est la plus utilisée dans les applications d'ingénierie. Une description détaillée et la dérivation de cette méthode est proposée dans [106, 107]. Elle est définie par :

$$z_n = z_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} \times (g(z_{n-1}, t_{n-1}) + g(z_{n-1} + \Delta t \times g(z_{n-1}, t_{n-1}), t_{n-1} + \Delta t)) \quad (2.24)$$

Cette méthode est également connue par la méthode d'Euler améliorée, la méthode trapézoïdale modifiée ou la méthode de Heun. L'une des méthodes de Runge-Kutta la plus utilisée est le quatrième ordre qui requiert quatre évaluations de la fonction par pas de temps. La méthode explicite de Runge-Kutta est facile à mettre en œuvre. Cependant, elle n'est pas conditionnellement stable. La méthode implicite de Runge-Kutta est plus stable et plus précise que

la méthode explicite. L'inconvénient des deux méthodes implicite et explicite est la difficulté d'évaluation des limites d'erreurs accumulées ou reproduites. Un algorithme particulier a été développé par [108] pour contrôler et régler l'erreur à chaque pas de calcul.

2.3.2 Méthodes implicite et explicites à plusieurs étapes

Cette méthode est basée sur l'intégration de l'équation différentielle $z' = g(z, t)$ à partir de t_{n-p} jusqu'à t_n , avec p est un entier positif.

$$z_n = z_{n-p} + \int_{t_{n-p}}^{t_n} g(z, t) dt \quad (2.25)$$

Afin de réaliser l'intégration, on peut approcher la fonction $g(z, t)$ en utilisant les différences finies. Le résultat obtenu dépend de l'ordre d'approximation de $g(z, t)$ et de la valeur de p . Si l'approximation de $g(z, t)$ comprend la valeur n , le procédé est appelé implicite, il est explicite dans le cas contraire. Les méthodes implicites sont plus précises et stables que les méthodes explicites. Mais, elles sont plus difficiles à utiliser, car z_n ne peut pas être résolue de manière explicite et un processus d'itération est nécessaire.

2.3.3 La Méthode de Newmark

Newmark a proposé un algorithme qui permet de résoudre les problèmes de dynamique des structures [109]. Cette méthode est fondée sur les interpolations des positions, des vitesses, et des accélérations de l'étape $n - 1$ à l'étape n :

$$\begin{cases} \dot{x}_n = \dot{x}_{n-1} + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{x}_{n-1} + \gamma\ddot{x}_n] \\ x_n = x_{n-1} + \Delta t \dot{x}_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\ddot{x}_{n-1} + 2\beta\ddot{x}_n] \end{cases} \quad (2.26)$$

x , \dot{x} , et \ddot{x} sont respectivement le vecteur position, vitesse, et accélération à l'instant n . La méthode est implicite et la stabilité est garantie si : $2\beta \geq \gamma \geq 1/2$.

Ce cas correspond à l'hypothèse selon laquelle l'accélération est constante sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$, et égale à $(\ddot{x}_{n-1} + \ddot{x}_n) / 2$. Ce procédé est également connu comme le procédé d'accélération moyenne. Comme pour les méthodes à plusieurs étapes, l'algorithme implicite des équations (2.26) peut être utilisé dans un modèle prédictor-correcteur.

Les interpolations de (2.26) sont directement introduits dans les équations de mouvement qui peuvent être linéaires ou non linéaires en fonction du type de problème. L'équation algébrique peut être résolue en calculant \ddot{x}_n et \dot{x}_n en fonction de x_{n-1} , \dot{x}_{n-1} , \ddot{x}_{n-1} et x_n . L'équation (2.26) peut être écrite comme suit :

$$\begin{cases} \ddot{x}_n = \frac{1}{\beta\Delta t^2} (x_n - x_{n-1}) - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{x}_{n-1} - \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} (x_n - x_{n-1}) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) \dot{x}_{n-1} - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \Delta t \ddot{x}_{n-1} \end{cases} \quad (2.27)$$

2.3.4 La Méthode de Shooting

En utilisant la méthode de Shooting, le mouvement transitoire précédant le régime établi n'est pas calculé, ce qui permet de diminuer le temps de calcul. Pour cela, la méthode de Shooting est plus efficace en terme de gain de temps de calcul. La solution du système dynamique pour les conditions initiales $z_0 = [x_0 \ y_0]^T$ est écrit comme suit $z_0 = z(z_0, 0)$. $z(z, t)$ est une solution périodique si $z(z, t) = z(z, t + T)$, avec T la période. Le calcul du système dynamique est effectué pour déterminer les solutions périodiques des équations non-linéaires de mouvement (2.20). Dans ce contexte, la méthode Shooting est une technique utilisée par plusieurs chercheurs [110–113]. Elle permet la résolution numérique du problème aux valeurs limites définies par la condition de périodicité suivante :

$$H(z, T) = z(z, T) - z \quad (2.28)$$

$H(z, T) = z(z, T) - z$ est appelée la fonction de Shooting. Elle représente la différence entre les conditions initiales et la réponse du système à l'instant T .

À partir de la condition initiale z_0 , la fonction $f(z^{(0)}, t)$ peut être calculée par la méthode d'intégration pour une période T_0 . La méthode d'itération de Newton-Raphson est utilisée pour corriger l'estimation initiale et converger vers la solution réelle.

$$H(z^{(0)} + \Delta z^{(0)}, T^{(0)} + \Delta T^{(0)}) = 0 \quad (2.29)$$

Les corrections $\Delta z^{(0)}$ et $\Delta T^{(0)}$ se retrouvent en étendant la fonction non linéaire en série de Taylor et en négligeant les termes d'ordre supérieur.

$$H(z^{(0)}, T^{(0)}) + \frac{\partial H(z^{(0)}, T^{(0)})}{\partial z} \Delta z^{(0)} + \frac{\partial H(z^{(0)}, T^{(0)})}{\partial T} \Delta T^{(0)} = 0 \quad (2.30)$$

Le vecteur z et la période T caractérisant la solution périodique sont calculés par la procédure itérative suivante :

$$\begin{cases} z^{(k+1)} = z^{(k)} + \Delta z^{(k)} \\ T^{(k+1)} = T^{(k)} + \Delta T^{(k)} \end{cases} \quad (2.31)$$

Avec :

$$H(z^{(k)}, T^{(k)}) + \frac{\partial H(z^{(k)}, T^{(k)})}{\partial z} \Delta z^{(k)} + \frac{\partial H(z^{(k)}, T^{(k)})}{\partial T} \Delta T^{(k)} = 0 \quad (2.32)$$

La convergence est atteinte lorsque $H(z, T) \approx 0$. Au voisinage de la solution, la convergence est rapide. Cependant, la convergence est garantie uniquement lorsque l'estimation est proche de la solution. Chaque itération de la méthode de Shooting implique l'intégration des équations du mouvement pour trouver le résidu actuelle $H(z^{(k)}, T^{(k)}) = z_M^{(k)}(z^{(k)}, T^{(k)}) - z^{(k)}$. Comme le montre l'équation (2.32), la méthode de Shooting exige également l'évaluation des dérivées partielles de $H(z_0, T) = z_M(z_0, T) - z_0$, ce qui permet d'écrire l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial H(z_0, T)}{\partial T} = \frac{\partial z_M(z_0, t)}{\partial t} \Big|_{t=T} = g(z_0, T) \\ \frac{\partial H(z_0, T)}{\partial z_0} = \frac{\partial z_M(z_0, t)}{\partial z_0} \Big|_{t=T} = [I] \end{cases} \quad (2.33)$$

Avec I la matrice d'identité. La matrice Jacobienne représente la variation de la solution $z_M(t, z_0)$ lorsque la condition initiale z_0 est perturbée. Elle peut être évaluée par une analyse numérique des différences finies en perturbant successivement chacune des conditions initiales et en intégrant l'équation de mouvement.

L'analyse de stabilité peut être calculée par l'algorithme de Shooting. La matrice Φ_T d'une orbite périodique $z_M(z_0, t)$ pour une période T est définie par la matrice Jacobienne suivante :

$$\Phi_T(z_0) = \left. \frac{\partial z_M(z_0, t)}{\partial z_0} \right|_{t=T} \quad (2.34)$$

La perturbation des conditions initiales par le vecteur Δz_0 est d'étendre la solution perturbée $z_M(z_0, t)$ par la série de Taylor.

$$\Delta z(T) = \Phi_T(z_0) \Delta z_0 + O(\|\Delta z\|^2) \quad (2.35)$$

Avec : $\Delta z(T) = z_M(z_0 + \Delta z_0, T) - z_M(z_0, T)$

La matrice Φ_T donne la variation de la solution du premier ordre pour une période T . Après p périodes, on a :

$$\Delta z(pT) = (\Phi_T(z_0))^p \Delta z_0 + O(\|\Delta z\|^2) \quad (2.36)$$

La stabilité de la solution périodique calculée par la méthode de Shooting est étudiée en calculant les valeurs propres de la matrice Φ_T . Ces valeurs propres s'appellent les multiplicateurs de Floquet et donnent une variation exponentielle de la perturbation de la matrice de monodromie Φ_T . Si les multiplicateurs de Floquet ont différentes amplitudes, le système dynamique est instable sinon le système dynamique est stable.

La méthode de Shooting et l'étude de stabilité ont été programmées sous Matlab. Pour l'appliquer, l'utilisateur doit programmer la fonction g de l'équation (2.22).

2.4 Méthode de la balance harmonique et méthode asymptotique numérique

La méthode de la balance harmonique (HBM) est généralement utilisée pour le calcul de la solution périodique. Elle consiste à trouver une solution sous la forme d'une série de Fourier. De cette manière, les équations différentielles non linéaires sont transformés en un système algébrique non-linéaire. Cependant, lorsque les non-linéarités sont complexes, la dérivation du système algébrique devient très complexe. D'autres méthodes ont été proposées pour résoudre ce problème, telles que la méthode de la balance harmonique incrémentale (IHBM) [114] ou la méthode de la balance harmonique alternative (AFT) [115], mais elles demandent un temps très important pour le calcul de la solution.

Cochelin et al. [116] ont proposé une autre stratégie d'application de la méthode HBM classique avec un grand nombre d'harmoniques. L'idée de base consiste à reformuler le système d'origine dans un nouveau système où les non-linéarités sont des polynômes quadratiques. Cela conduit à un système non linéaire quadratique à l'application de la méthode HBM est plus simple.

De plus, la transformation quadratique permet d'utiliser la méthode asymptotique numérique (MAN). La méthode MAN présente plusieurs avantages : elle fournit des solutions continues, la continuité est très robuste et le contrôle de la longueur de l'étape est automatique et toujours optimale [117–120]. Cette méthode est détaillée dans les travaux de Cochelin et al [116].

2.4.1 Transformation quadratique

Soit le système d'équation suivant :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix} = g(z, t) \quad (2.37)$$

La formulation du système d'origine (2.37) dans un nouveau système (2.38) permet de supprimer les non-linéarités. Le nouveau système quadratique contient à la fois les équations différentielles et les équations algébriques.

$$m(\dot{z}) = c + l(z) + q(z, z) \quad (2.38)$$

Avec c le vecteur constant, $l(\cdot)$ le vecteur linéaire et $q(\cdot, \cdot)$ le vecteur quadratique.

2.4.2 Application de HBM

Le principe de base de la méthode de la balance harmonique consiste à décomposer $z(t)$ sous la forme d'une série de Fourier :

$$z(t) = z_0 + \sum_{i=1}^H z_{c,i} \cos(i\omega t) + \sum_{i=1}^H z_{s,i} \sin(i\omega t) \quad (2.39)$$

Les composants de la série de Fourier sont données par le vecteur U de taille $(2H + 1)n$, avec n le nombre d'équations du système (2.39).

$$U = [z_0^t, z_{c,1}^t, z_{s,1}^t, z_{c,2}^t, z_{s,2}^t, \dots, z_{c,H}^t, z_{s,H}^t] \quad (2.40)$$

On introduit l'équation (2.39) dans le système d'équations (2.38), on rassemble les termes de même indice harmonique et on néglige les harmoniques d'ordre supérieur. Ce qui permet d'obtenir un système d'équations de taille $(2H + 1)n$:

$$\omega M_1(U) = C_1 + L_1(U) + Q_1(U, U) \quad (2.41)$$

Les nouveaux opérateurs $M_1(\cdot)$, C_1 , $L_1(\cdot)$, et $Q_1(\cdot, \cdot)$ dépendent des opérateurs $m(\cdot)$, c , $l(\cdot)$ et $q(\cdot, \cdot)$.

2.4.3 Continuation par la Méthode Asymptotique Numérique (MAN)

Cette méthode permet la résolution de l'équation algébrique suivante :

$$R(U) = 0 \quad (2.42)$$

Avec $R \in \mathbb{R}^N$, $U \in \mathbb{R}^N$ et $N = (2H + 1)n + 1$. Pour appliquer la méthode MAN, l'équation (2.42) est réécrite comme suit :

$$R(U, \Omega) = C_1 + L_1(U) + Q_1(U, U) - wM_1(U) = 0 \quad (2.43)$$

En supposant que solution régulière (U_0, w_0) de l'équation (2.42) est connue, la branche de la solution est représentée comme un développement en série de puissance (tronquée à l'ordre N) par rapport au paramètre a [120]

$$\begin{aligned} U(a) &= U_0 + aU_1 + a^2U_2 + \dots + a^N U_N \\ w(a) &= w_0 + aw_1 + a^2w_2 + \dots + a^N w_N \end{aligned} \quad (2.44)$$

Le paramètre de la longueur de pseudo-arc est exprimé sous la forme suivante [118] :

$$a = U_1(U - U_0)^T + w_1(w - w_0) \quad (2.45)$$

Avec (U_1, w_1) est le vecteur tangent à (U_0, w_0) . L'introduction du développement de l'équation (2.44) dans (2.43) et (2.45) et en gardant les termes de puissance jusqu'à l'ordre N , conduit à :

$$R(a) = R_0 + aR_1 + a^2R_2 + \dots + a^N R_N = 0 \quad (2.46)$$

Assimilant les termes $(R_{i(1 \leq i \leq N)})$ à zéro permet de transformer le système non-linéaire (2.42) en une succession de N systèmes linéaires de (N_{eq}) équations, qui sont ensuite résolues par récurrence afin d'obtenir U_i et w_i ($1 \leq i \leq N$).

Cette procédure est très efficace du point de vue du calcul puisque tous les systèmes linéaires partagent la même matrice jacobienne de R évaluée à (U_0, w_0) . De plus, le domaine de validité de a_{max} de la série peut être estimé a priori par :

$$a_{max} = \left(\frac{\varepsilon}{R_{N+1}} \right)^{\frac{1}{N+1}} \quad (2.47)$$

Avec ε un paramètre de tolérance définie par l'utilisateur. Ainsi, une partie de la branche de solution est obtenue en suivant l'équation (2.44) jusqu'à atteindre $a = a_{max}$. Ce point final est ensuite utilisé comme un nouveau point de départ (U_0, w_0) et la prochaine partie de la branche de solution est obtenue en redémarrant le processus de poursuite. En conséquence, la longueur de pas est naturellement adaptative et optimale [119] et la poursuite est très robuste.

2.4.4 Programmation sous MANLAB

MANLAB [121, 122] est un logiciel interactif ouvert entre la méthode de continuation, l'analyse de bifurcation du système algébrique et la méthode asymptotique numérique (MAN). Il possède une interface graphique pour l'utilisateur (GUI) qui contient des boutons, des entrées en ligne et des fenêtres graphiques pour générer, visualiser et analyser le diagramme de bifurcation et la solution du système résolu. L'utilisateur donne trois vecteurs : le vecteur constant (L_0), le vecteur linéaire (L) et le vecteur quadratique (Q).

2.5 Application

2.5.1 Oscillateur de Duffing forcé

Soit l'équation de Duffing (2.48) du système à 1DDL (Figure 2.4) :

$$\ddot{u} + c\dot{u} + \Omega^2 u + \beta u^3 = F \cos(\omega t) \quad (2.48)$$

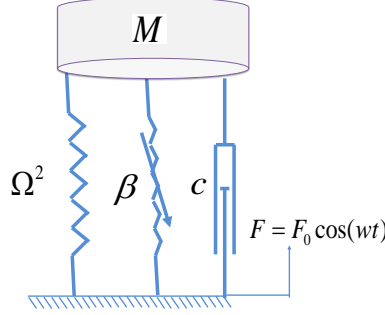


FIGURE 2.4 – Système dynamique à un seul degré à non linéarité du Duffing

Avec :

$$\begin{cases} c = 9; \\ \Omega = 33; \\ F = 10; \\ \beta = 3.6 * 10^6; \end{cases} \quad (2.49)$$

Nous réécrivons l'équation du Duffing comme un système quadratique du premier ordre ODE.

$$\begin{cases} \dot{u} = +v \\ \dot{v} = F \cos(\omega t) - \Omega^2 u - cv - \beta u v \\ 0 = 0 + w - u^2 \end{cases} \quad (2.50)$$

Nous utilisons la formulation suivante pour appliquer la méthode asymptotique numérique (MAN) :

$$m(\dot{u}) = c + l(u) + q(u, u) \quad (2.51)$$

Avec : $l(u)$ l'opérateur linéaire, $q(u, u)$ l'opérateur quadratique et $u(t) = [u, v, w]$ On cherche les solutions périodiques (H harmoniques) qui peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned} u(t) = & u_0 + u_{1c} \cos(\omega t) + u_{1s} \sin(\omega t) + u_{2c} \cos(2\omega t) + u_{2s} \sin(2\omega t) + \dots \\ & \dots + u_{Hc} \cos(H\omega t) + u_{Hs} \sin(H\omega t). \end{aligned} \quad (2.52)$$

La méthode de la balance harmonique HBM conduit à un système d'équations algébriques de taille $N_{eq}(2H + 1)$ écrit sous cette forme :

$$C + L(U) - \omega M(U) + Q(U, U) = 0 \quad (2.53)$$

Avec $N_{eq} = 3$ est le nombre de d'équations du système quadratique et $U = [u_0 u_{1c} u_{1s} u_{2c} u_{2s} \dots u_{Hs}, \omega]$
La Figure 2.5 montre l'effet de l'ajout du terme de Duffing β dans la résolution de l'équation différentielle (2.5) :

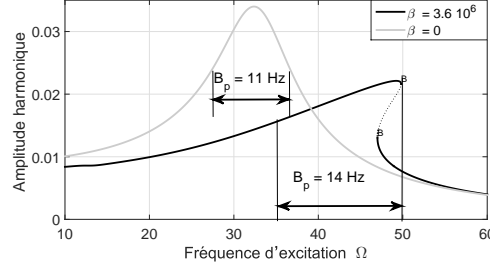


FIGURE 2.5 – Effet de l'ajout du terme non linéaire de Duffing β dans le cas d'un oscillateur à 1DDL

Si on néglige le terme de Duffing, les résultats linéaires sont loin des résultats réels lorsque la force d'excitation est importante.

2.5.2 Deux Oscillateurs non linéaire couplés et forcés

Soit l'équation de Duffing (2.54) du système à deux degrés de liberté (2.6) :

$$\begin{cases} \left(\begin{array}{l} \ddot{u}_1 + \mu_1 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) - \mu \dot{u}_2 + \eta (u_1 - u_2) + \eta_1 u_1 \\ + \alpha (u_1 - u_2)^2 - \alpha_1 u_1^2 + \lambda (u_1 - u_2)^3 - \lambda_1 u_1^3 \end{array} \right) = Y_0 w^2 \cos(\omega t) \\ \left(\begin{array}{l} \ddot{u}_2 + \mu_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - \mu \dot{u}_1 + \eta (u_2 - u_1) + \eta_2 u_2 \\ + \alpha (u_2 - u_1)^2 - \alpha_2 u_2^2 + \lambda (u_2 - u_1)^3 - \lambda_2 u_2^3 \end{array} \right) = Y_0 w^2 \cos(\omega t) \end{cases} \quad (2.54)$$

Avec :

$$\begin{cases} \mu = 1.6 & \mu_1 = 17.9 & \mu_2 = 6.375 \\ \eta = 600 & \eta_1 = 1900 & \eta_2 = 675 \\ \alpha = 60 \times 10^3 & \alpha_1 = 191 \times 10^3 & \alpha_2 = 7.5 \times 10^3 \\ \lambda = 53 \times 10^5 & \lambda_1 = 169 \times 10^5 & \lambda_2 = 6.6 \times 10^5 \end{cases} \quad (2.55)$$

Les équations (2.54) peuvent être écrites sous la forme simplifiée suivantes :

$$\dot{z} = g(t, z, w^2) \quad (2.56)$$

Où z est un vecteur inconnu, g est une fonction périodique de t et w est un paramètre réel. Le point essentiel de cette méthode réside dans la formulation quadratique de l'équation (2.54) par l'introduction de l'ensemble des variables auxiliaires (Équation (2.57)) :

$$\begin{aligned} z_1 &= \dot{v}_1 & z_2 &= \dot{v}_2 & w_1 &= \dot{v}_1^2 \\ w_2 &= \dot{v}_2^2 & w_{12} &= \dot{v}_1 \dot{v}_2 \\ r_1 &= w & r_2 &= Y_0 \cos(\omega t) & r_3 &= w^2 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Équation (2.54) est écrite sous sa forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Y_0 \cos(wt) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ Ul_1 \\ Ul_2 \\ -w_1 \\ -w_2 \\ -r_1 \\ -r_2 \\ -r_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Uq_1 \\ Uq_2 \\ v_1^2 \\ v_2^2 \\ 0 \\ 0 \\ r_1^2 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$m(\dot{Z}) = c(t, w) + l(w) + wl_{c1} + q(Z, Z)$$

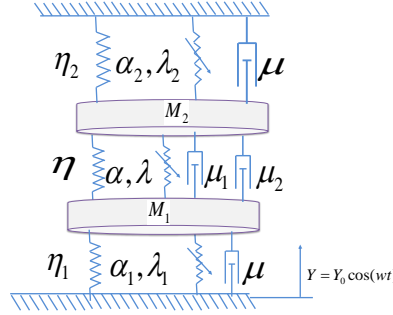


FIGURE 2.6 – Système dynamique à deux degrés de liberté à non linéarité du Duffing

Avec :

$$\begin{cases} Ul_1 = \mu_1 (z_1 - z_2) - \mu z_2 + \eta (u_1 - u_2) + \eta_1 u_1 \\ Ul_2 = \mu_2 (z_2 - z_1) - \mu z_1 + \eta (u_2 - u_1) + \eta_2 u_2 \\ Uq_1 = \alpha (u_1^2 + u_2^2 - 2u_2 u_1) - \alpha_1 u_1^2 + \lambda (u_1 w_1 - u_2 w_2 + 3u_1 w_2 - 3u_2 w_1) - \lambda_1 u_1 w_1 \\ Uq_2 = \alpha (u_1^2 + u_2^2 - 2u_2 u_1) - \alpha_2 u_2^2 + \lambda (u_2 w_2 - u_1 w_1 + 3u_2 w_1 - 3u_1 w_2) - \lambda_2 u_2 w_2 \end{cases} \quad (2.59)$$

Où : $Z = [v_1 \ v_2 \ z_1 \ z_2 \ w_1 \ w_2 \ w_{12} \ r_1 \ r_2 \ r_3]^T$ est un vecteur de dimension $Neq = 10$; $c(t, w)$ et $l(w)$ sont des vecteurs constants ; $m(\dot{Z})$ et $l(Z)$ sont les vecteurs linéaires et $q(Z, Z)$ est un vecteur quadratique. L'application de la méthode de la balance harmonique HBM à l'équation (2.58) peut décomposer l'ensemble des solutions $Z(t)$ en une série de Fourier tronquée comme suit :

$$Z(t) = Z_0 + \sum_{k=1}^H Z_{c,k} \cos(kwt) + \sum_{k=1}^H Z_{s,k} \sin(kwt) \quad (2.60)$$

Le vecteur U , de taille $(2H + 1) Neq$, permet d'assembler les composants de la série de Fourier :

$$U = [Z_0^T + Z_{c,1}^T + Z_{s,1}^T + Z_{c,2}^T + Z_{s,2}^T + Z_{c,3}^T + Z_{s,3}^T + \dots + Z_{c,H}^T + Z_{s,H}^T]^T \quad (2.61)$$

En substituant l'équation (2.61) dans (2.58), et après sommation des termes de même harmonique de plus on néglige l'ordre le plus élevé, on obtient le système suivant :

$$\Omega M(U) = C + L(U) + Q(U, U) \quad (2.62)$$

Avec $M(\cdot)$, C , $L(\cdot)$ et $Q(\cdot, \cdot)$ sont les opérateurs qui dépendent des vecteurs $m(\cdot)$, $l(\cdot)$, c et $q(\cdot, \cdot)$ comme il a défini [116] Nous résolvons le système algébrique obtenu en utilisant la technique de continuation. Pour appliquer la méthode MAN, l'équation (2.54) devient :

$$R(U, w) = C + L(U) + Q(U, U) - wM(U) = 0 \quad (2.63)$$

La Figure 2.7 montre l'effet des termes non linéaires β dans la solution (2.5) :

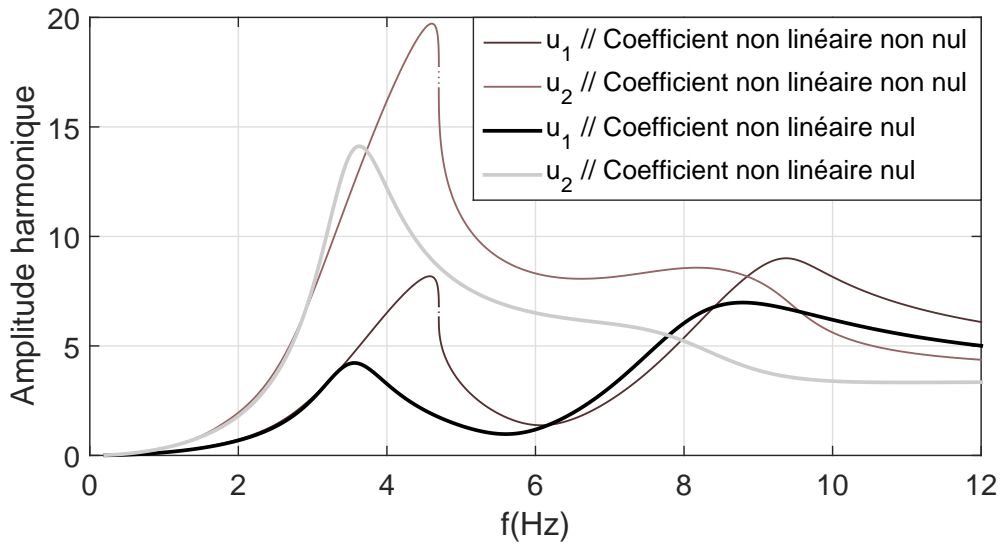


FIGURE 2.7 – Effet des termes non linéaire dans le cas de deux oscillateurs dynamiques couplés

Si on néglige les termes non linéaires, les résultats linéaires sont loin des résultats réels lorsque la force d'excitation est importante.

La Figure donne l'influence de la localisation des modes [123] suite à une perturbation du premier ou du deuxième mode.

-Dans le cas où les deux oscillateurs sont identiques on a $\eta_1 = \eta_2 = 600$. La Figure 2.8 illustre la variation des deux pulsations propre ω_1 et ω_2 suite à une perturbation du couplage η entre les deux oscillateurs.

-Pour le cas où les deux oscillateurs sont légèrement perturbés on a $\eta_1 = 600$ et $\eta_2 = 500$. La Figure 2.9 donne la variation de deux modes propre w_1 et w_2 suite à une perturbation du couplage η entre les deux oscillateurs.

Pour un faible couplage entre les deux oscillateurs, les deux modes se croisent. Mais lorsque les deux oscillateurs sont légèrement perturbés, les deux modes ne se croisent pas. On conclut que la localisation des modes et des valeurs propres se produit pour un faible couplage η entre les oscillateurs.

Plusieurs auteurs ont proposé de faire une étude de sensibilité ou une étude d'optimisation pour améliorer les paramètres de localisation des modes et d'améliorer les performances de

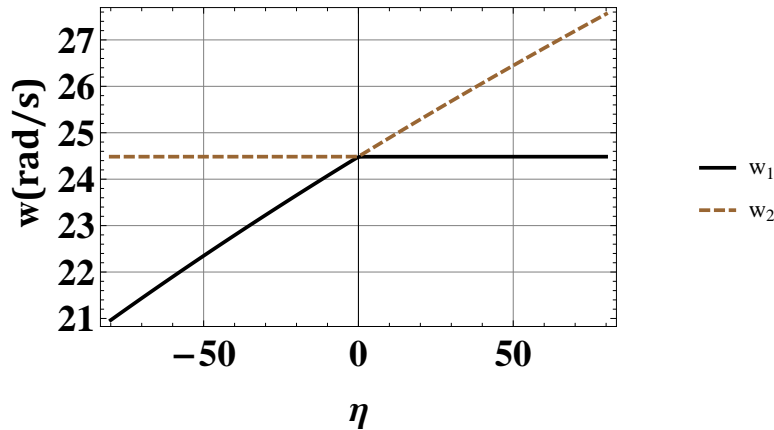


FIGURE 2.8 – Étude de localisation des modes pour deux oscillateurs identiques

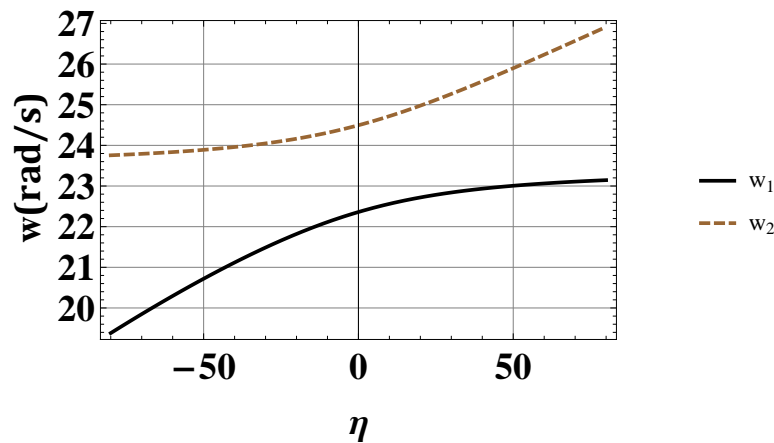


FIGURE 2.9 – Localisation des modes pour deux oscillateurs légèrement perturbés

l'oscillateur. Pour cela, dans la suite on présente une étude bibliographique sur l'analyse de sensibilité et d'optimisation.

2.6 Analyse de sensibilité

L'estimation des paramètres est une étape importante dans la construction de modèles mécaniques. Le comportement du modèle est fortement dépendant des paramètres et si ces paramètres sont incertains, les conclusions tirées à la sortie du modèle doivent tenir compte de ces incertitudes. L'analyse de sensibilité permet d'étudier les effets de perturbation du système et d'identifier les paramètres importants pour le contrôle du comportement du système. L'utilisation de l'analyse de sensibilité est établie dans la modélisation mathématique dans de nombreux domaines. Parmi les types d'analyse de sensibilité les plus connus nous citons l'analyse de sensibilité locale et l'analyse de sensibilité globale.

2.6.1 Analyse de sensibilité locale

Pour un modèle d'équations différentielles général :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix}^t = g(z, t, k) \quad (2.64)$$

Où k désigne le m -vecteur des paramètres de conception du système. Une légère modification des paramètres de conception est exprimée comme un développement en série de Taylor comme suit :

$$z_i(t, k + \Delta k) = z_i(t, k) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_i}{\partial k_j} \Delta k_j + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 z_i}{\partial k_l \partial k_j} \Delta k_l \Delta k_j + \dots \quad (2.65)$$

La dérivé partielle $\partial y_i / \partial k_j$ est connue sous le nom de coefficient de sensibilité locale de premier ordre et permet de construire la matrice de sensibilité $S(t) = \{s_{ij}\} = \{\partial y_i / \partial k_j\}$. s_{ij} décrit la variation de la i ème variable de sortie à l'instant t suite à un petit changement du paramètre j autour de sa valeur nominale.

Le trajet conceptuel le plus simple pour calculer les sensibilités locales est la méthode indirecte ou des différences finies. En utilisant cette méthode, le modèle est résolu pour certains points de paramètres choisis $k_j + \Delta k_j$ alors que les autres paramètres sont maintenus à leurs valeurs nominales. La sensibilité est calculée en utilisant l'approximation suivante :

$$s_{ij}(t) \approx \frac{z_i(k_j + \Delta k_j, t) - z_i(k_j, t)}{\Delta k_j} \quad (2.66)$$

La méthode indirecte nécessite au moins $m + 1$ résolutions du problème. Pour les modèles avec un grand nombre de paramètres, le calcul devient intensif et le temps de calcul devient long. L'utilisation de l'approche indirecte pour les différences finies suppose une linéarité locale autour du point de paramètre nominale. Si le pas est trop grand, cette hypothèse n'est pas valide. Inversement, si la taille de pas est trop petite, la différence entre les solutions est perturbée et les erreurs numériques deviennent un problème. Saltelli et al [124] ont rapporté que la recherche de la meilleure solution est un processus d'essais et d'erreurs et De Pauw et al [125] ont évalué la qualité des coefficients de sensibilité.

Les équations du modèle (2.64) sont différenciées par rapport au paramètre k_j pour donner le système d'équations différentielles de sensibilité suivant :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial k_j} = \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial k_j} + \frac{\partial g}{\partial k_j} \quad (2.67)$$

Il y a plusieurs méthodes pour déterminer la sensibilité. Parmi les plus connues, on peut citer la méthode directe découplée [124, 126].

Les techniques d'analyse de sensibilité locale ont été appliquées à certains modèles pour analyser leur comportement en fonction du temps et identifier les paramètres importants. Dans un premier temps, elles étudient le comportement du modèle pour une région limitée autour des paramètres nominaux. Dans un second temps, les techniques locales ne tiennent compte que d'un seul changement de paramètre à la fois. Dans les systèmes dynamiques, les interactions entre les paramètres de conception jouent un rôle primordial, ce qui constitue un inconvénient majeur pour cette méthode locale. Pour s'affranchir de ce problème, on fait recours à la méthode

d'analyse de sensibilité globale .

2.6.2 Analyse de sensibilité globale

L'analyse de sensibilité globale basée sur la simulation de Monte Carlo (MC) implique un échantillonnage aléatoire des paramètres d'entrées du modèle et la construction d'une distribution de probabilité empirique résultant des paramètres de sortie. L'approche de Monte Carlo MC exige que toutes les entrées et les sorties soient des valeurs scalaires si l'incertitude d'une variable est caractérisée par une fonction de distribution de probabilité (PDF). Le facteur d'entrée est utilisé pour décrire les variables scalaires aléatoires qui sont utilisées pour caractériser l'incertitude des données d'entrées et les paramètres du modèle [125], des conditions initiales et aux limites, etc. Ce terme est équivalent à une entrée de modèle spatialement localisé.

Les fonctions de distribution de probabilité (PDF) de sortie du modèle sont utilisées pour déterminer les incertitudes, le niveau d'erreur, ou de déterminer la probabilité de dépassement de la valeur limite [127]. La génération des échantillons de facteurs d'entrée (PDF) est obtenue en utilisant différentes méthodes d'échantillonnage : simples , aléatoires ou stratifiés. L'échantillonnage de la méthode "hypercube latin" est utilisé par [128, 129] , des séquences quasi aléatoires [130], test de sensibilité de l'amplitude de Fourier [131], et les modèles d'équilibre aléatoires [132]. Les méthodes de sensibilité globale sont choisies en fonction de : l'objectif d'analyse, le nombre de facteurs d'entrée incertains, le degré de régularité du modèle et le temps de calcul (CPU) [133–135].

L'analyse de sensibilité globale est basée sur les méthodes de projection [136, 137], ou bien sur la méthode de régression [124, 133] ou bien sur la variance [134, 135].

Les méthodes de criblage, comme la méthode de Morris fournissent des mesures qualitatives de la sensibilité. Si le modèle est coûteux en temps (CPU), l'application de techniques globales est non réalisable. De plus, [137] a montré que le procédé pourrait être appliqué à un grand nombre de facteurs. La sélection des facteurs d'incertitudes est une étape importante [138]. En effet, l'impact relatif d'un facteur d'incertitude sur la variation du critère de performance est sous-estimé dans un premier temps et il est réglé sur une valeur a priori. L'estimation de la variation du critère obtenu serait alors erronée. La sous-estimation de l'influence des facteurs en utilisant la méthode de Morris est due à ces raisons. Tout d'abord, la méthode de Morris est basée sur des choix arbitraires. Par exemple, le nombre de variation pour chaque facteur est fixé a priori. De plus, le procédé de criblage nécessite un nombre limité de calculs et les facteurs constants sont aussi choisis arbitrairement. De même, l'évaluation du critère de sensibilité avec différentes facteurs d'incertitude induit la robustesse des résultats mais elle est difficile à prédire. Généralement, la méthode de Morris est utilisée sous sa forme originale, basée sur l'échantillonnage aléatoire [134].

2.7 Optimisation multi-objectif

Le problème d'optimisation multi-objectif se compose d'un ensemble de fonctions objectif à maximiser ou à minimiser. L'ensemble des résultats, tenant compte des contraintes du problème, est l'espace de conception. Le problème d'optimisation multi-objectif est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \min(F(x)) &= (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)) \\ \begin{cases} g_i(x) = 0, j = 1, \dots, m \\ h_k(x) \leq 0, k = 1, \dots, p \end{cases} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Les deux buts d'optimisation multi-objectifs [139] sont : (i) La convergence des solutions Pareto optimales et (ii) le maintien de l'ensemble des solutions Pareto optimales. Les deux buts sont indépendants l'un de l'autre et l'algorithme d'optimisation doit avoir les propriétés d'atteindre ces deux objectifs. Selon [139], il y a deux étapes définies dans le but de trouver la meilleure solution :

- Trouver un compromis optimal entre des multiples solutions .
- Choisir l'une des solutions obtenues en utilisant des informations au niveau supérieur.

La solution idéale est de trouver un compromis entre la répartition de l'ensemble des solutions, puis d'appliquer les préférences. Dans la plupart des algorithmes d'optimisation multi-objectif la notion de dominance est utilisée pour comparer deux solutions. Une solution est dominante, si les deux conditions suivantes sont remplies :

- La solution est mauvaise par rapport aux autres solutions dans tous les objectifs .
- La solution est la meilleure par rapport aux autres solutions dans au moins un des objectifs.

Les algorithmes génétiques de type NSGA (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm) ont une tailles de population supérieur à 1. Chaque individu de la population représente une solution unique, et ces algorithmes génétiques sont adaptés pour générer la solution optimale définie dans les problèmes d'optimisation multi-objectifs. Selon [140] , L'algorithme NSGA a trois propriétés :

- Il utilise le principe sélectif .
- Il est fondé sur la diversité explicite des outils de conservation .
- Il accentue sur les solutions non-dominées.

L'algorithme NSGA [141] est utilisé pour résoudre plusieurs fonctions objectif simultanément. Une version améliorée (NSGA-II), permet de remédier aux inconvénients de l'algorithme NSGA et qui sont : la grande complexité de calcul du tri non-dominé, l'absence de sélection, et la nécessité de spécifier le paramètre de répartition. Pour obtenir des solutions Pareto optimales par NSGA II plus efficaces, une augmentation du nombre de générations est nécessaire.

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques méthodes de résolution des équations différentielles non-linéaires. Ces méthodes ont été appliquées sur des systèmes dynamiques à 1 ddl ou 2 ddl. La résolution par la méthode d'intégration temporelle (ODE45) ou la méthode de résolution numérique Manlab donne des résultats proches des résultats de références. Par contre, la résolution par la méthode de perturbations à échelles multiples donne des résultats différents par rapport aux deux autres méthodes (la méthode d'intégration temporelle (ODE45) ou la méthode de résolution numérique Manlab) suite à l'erreur de résolution. Cette erreur est due à la limitation à l'ordre 1. Si cet ordre augmente, la résolution par cette méthode devient plus difficile pour cela dans les chapitres suivant on choisi la méthode de résolution numérique Manlab comme méthode de résolution non linéaire de référence . De plus, des méthodes de sensibilité globale, telle que la méthode de Morris, sont plus adaptées pour réduire les paramètres de calcul ont été

présentées. Les algorithmes génétiques de type NSGA et NSGA II ont été rappelés pour la résolution des problèmes d'optimisation multi-objectif. Ces outils analytiques et numériques seront utilisés dans le reste de ce travail pour résoudre des problèmes de dynamique non linéaires.

Chapitre 3

Réseaux d'aimants en lévitation avec couplage magnétique

3.1 Introduction

Plusieurs travaux ont été présentés dans le premier chapitre sur les récupérateurs linéaires classiques, les récupérateurs multimodaux et non-linéaires. Dans ce cadre, nous proposons une approche de récupération d'énergie basée sur le couplage d'un réseau d'aimants en lévitation magnétique. Cette approche combine les avantages combinés des non-linéarités et des interactions modales.

L'idée de base consiste essentiellement à élargir la bande passante et à augmenter la puissance récupérable. Les équations de mouvement non-linéaires couplées sont résolues en utilisant la méthode de la balance harmonique (HBM) associé à la méthode asymptotique numérique (ANM) [116].

Ensuite, pour améliorer les performances de récupération d'énergie en terme de bande passante et de puissance récupérable, nous avons introduit une procédure d'optimisation multi-objectifs à l'aide de l'algorithme NSGA-II [140]. Des comparaisons par rapports à l'état de l'art ont été faites entre les récupérateurs d'énergie découplés avec un seul aimant en lévitation, avec deux aimants et avec trois aimants couplés en lévitation afin de montrer les hautes performances de la stratégie de récupération d'énergie vibratoire proposée.

3.2 Modélisation du système dynamique

3.2.1 Description du générateur proposé

Mann et Sims ont proposé un récupérateur d'énergie de vibration composé d'un seul aimant en lévitation [1]. Dans ce contexte, nous avons proposé un générateur composé de plusieurs aimants en lévitation magnétique. En profitant des interactions modales et des non-linéarités magnétiques, la bande passante et la puissance récupérable peuvent être significativement améliorées.

La Figure 3.1 illustre le générateur proposé. Il est composé de $n + 2$ aimants M_i avec $i \in [0, n + 1]$. Les aimants M_0 et M_{n+1} sont fixés dans un tube en Téflon tandis que les aimants $M_1, M_2 \dots M_{n-1}$ et M_n sont libres à l'intérieur de ce tube. Tous les aimants sont placés verti-

calement de manière ce que toutes les surfaces opposées présentent le même pôle magnétique. Dans chaque zone qui sépare deux aimants adjacents, une bobine est placée verticalement pour effectuer la transduction électromagnétique.

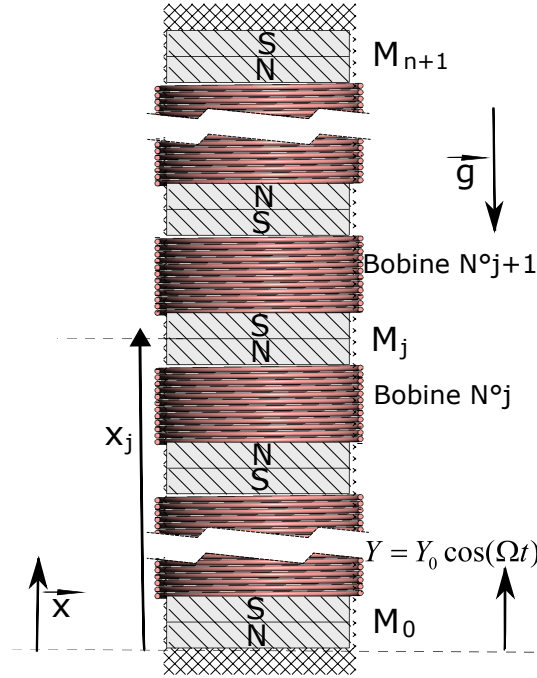


FIGURE 3.1 – Générateur électromagnétique composé d'un réseau d'aimant en lévitation magnétique. [142]

3.2.2 Force de lévitation magnétique

La Figure 3.1 illustre l'aimant (M_j) soumis à plusieurs forces. Le repère fixe lié au tube est désigné par le vecteur \vec{x} utilisé pour décrire l'amplitude de l'excitation à la base Y_0 à la fréquence Ω . Les autres références ($x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ et x_n) décrivent le mouvement de chaque aimant mobile soumis à la force de gravitation suivante $\vec{P}_j = M_j \vec{g}$. La force magnétique selon la Figure 3.2 est exprimée par l'équation suivante comme suit [52, 143] :

$$\begin{cases} \vec{F}_{j,j-1} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_{M_{j-1}} Q_{M_j}}{(d-x_j+x_{j-1})^2} \vec{x} \\ \vec{F}_{j,j+1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_{M_{j+1}} Q_{M_j}}{(d+x_j-x_{j+1})^2} \vec{x} \end{cases} \quad (3.1)$$

Q_{M_j} est l'intensité magnétique du j^{eme} aimant, μ_0 est la perméabilité magnétique, d est la distance qui sépare deux aimants adjacents, $x_0 = x_{n+1} = Y$ représente l'amplitude d'excitation et $g = 9,81 m/s^2$ est la constante de gravitation. En posant $v_j = x_j - Y$, la force magnétique appliquée sur chaque aimant mobile M_j peut s'écrire sous la forme suivante :

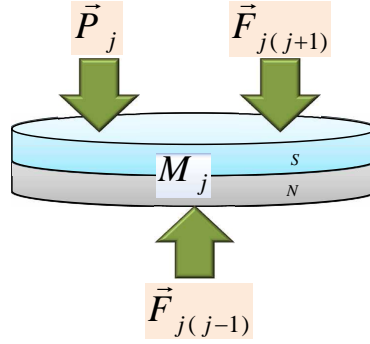


FIGURE 3.2 – Représentation schématique des forces magnétiques et gravitationnelles appliquées sur l'aimant en lévitation.

$$\vec{F}_j^m = \vec{F}_{j,j-1} + \vec{F}_{j,j+1} + \vec{P}_j$$

$$= \left(\frac{\mu_0 Q_{M_j}}{4\pi} \left(\frac{Q_{M_{j-1}}}{(d+v_{j-1}-v_j)^2} - \frac{Q_{M_{j+1}}}{(d+v_j-v_{j+1})^2} \right) - M_j g \right) \vec{x} \quad (3.2)$$

$Q_{M_j} = S_j H_{c_j}$ est l'intensité magnétique de chaque aimant M_j . Avec S_j et H_{c_j} sont respectivement la section transversale et la force coercitive de l'aimant M_j .

A l'équilibre statique, la force de restauration magnétique vérifie ($\vec{F}_j^m = \vec{0}$). En supposant que la position de chaque aimant mobile à l'équilibre est ($v_j = 0$), nous obtenons l'équation suivante :

$$Q_{M_j} = \frac{4\pi M_j g d^2}{\mu_0 (Q_{M_{j-1}} - Q_{M_{j+1}})} \quad (3.3)$$

En substituant l'équation (3.3) dans l'équation (3.2), nous obtenons :

$$\vec{F}_j^m = \left(\frac{M_j g d^2}{Q_{M_{j-1}} - Q_{M_{j+1}}} \left(\frac{Q_{M_{j-1}}}{(d+v_{j-1}-v_j)^2} - \frac{Q_{M_{j+1}}}{(d+v_j-v_{j+1})^2} \right) - M_j g \right) \vec{x} \quad (3.4)$$

3.2.3 Force d'amortissement électromagnétique

Lorsque le générateur est soumis à une vibration mécanique externe, chaque aimant mobile M_j oscille autour de sa position d'équilibre. Ceci induit un courant dans chaque bobine comme le montre la Figure 3.3, et génère les forces d'amortissement électromagnétique suivantes :

$$F_j^e = \alpha_{j-1} i_{j-1} - \alpha_j i_j \quad (3.5)$$

Avec $\alpha_j = N_j B L$ le coefficient de couplage électromécanique, B la force magnétique moyenne, N_j le nombre de spires de la bobine et L la longueur de la bobine.

Afin de résoudre le problème de la différence des phases entre les courants induits circulant dans chaque bobine, un circuit électrique indépendant est proposé pour chaque bobine Figure 3.3. En appliquant la théorie de Kirchhoff pour les circuits électriques, nous obtenons l'équation

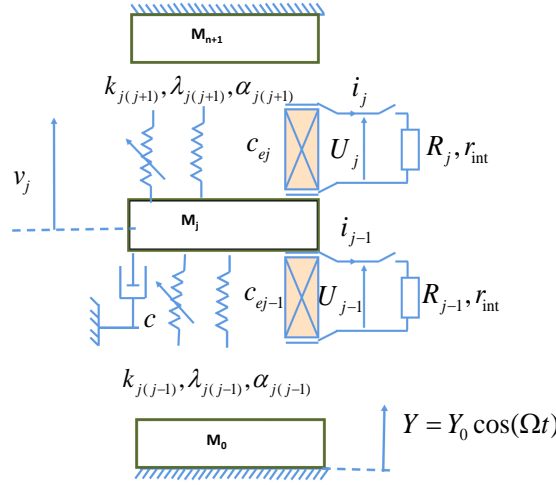


FIGURE 3.3 – Générateur électromagnétique équivalent à n aimants en lévitation magnétique.

suivante :

$$R_j i_j = \alpha_j (\dot{v}_{j+1} - \dot{v}_j) - r_{int} i_j \quad (3.6)$$

Les équations (3.5) et (3.6) donnent l'expression suivante :

$$F_j^e = c_{ej-1} (\dot{v}_j - \dot{v}_{j-1}) - c_{ej} (\dot{v}_{j+1} - \dot{v}_j) \quad (3.7)$$

L'amortissement électrique est exprimé en fonction de la résistance interne de la bobine r_{int} , la résistance de charge R_j et le coefficient de couplage électromécanique α_j [50] :

$$c_{ej} = \frac{\alpha_j^2}{R_j + r_{int}} \quad (3.8)$$

3.2.4 Équation de mouvement

L'application du théorème de la résultante dynamique à chaque aimant mobile M_j conduit à l'équation de mouvement suivante :

$$M_j \ddot{v}_j + c \dot{v}_j + F_j^e + F_j^m = -M_j \ddot{Y} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

On fait le développement en série Taylor jusqu'au troisième ordre des forces magnétiques non linéaires écrites dans l'équation (3.4). Le système d'équations non linéaires couplées est obtenu comme suit :

$$\begin{aligned}
 & M_j \ddot{v}_j + (c + c_{ej-1} + c_{ej}) \dot{v}_j - c_{ej} \dot{v}_{j+1} - c_{ej-1} \dot{v}_{j-1} + k_{j,j+1} (v_j - v_{j+1}) \\
 & + k_{j,j-1} (v_j - v_{j-1}) + \alpha_{j,j+1} (v_j - v_{j+1})^2 - \alpha_{j,j-1} (v_j - v_{j-1})^2 \\
 & + \lambda_{j,j+1} (v_j - v_{j+1})^3 - \lambda_{j,j-1} (v_j - v_{j-1})^3 = -M_j \ddot{Y}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Ce développement limité est valable lorsque le déplacement de l'aimant en lévitation est en dessous de 50% de la distance du gap entre deux aimants consécutifs. Le changement de variable $Q_{M_j} = Q'_{M_j} M_j$ est substitué dans l'équation (3.4), et en supposant que les intensités magnétiques sont égales ($Q'_{M_{j-1}} = Q'_{M_{j+1}} = Q'$), les rigidités linéaire et non linéaires s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}
 k_{j,j+1} &= \frac{2g}{d} \frac{M_j M_{j+1}}{M_{j-1} - M_{j+1}} & k_{j,j-1} &= \frac{2g}{d} \frac{M_j M_{j-1}}{M_{j-1} - M_{j+1}} \\
 \alpha_{j,j+1} &= \frac{3}{2d} k_{j,j+1} & \alpha_{j,j-1} &= \frac{3}{2d} k_{j,j-1} \\
 \lambda_{j,j+1} &= \frac{2}{d^2} k_{j,j+1} & \lambda_{j,j-1} &= \frac{2}{d^2} k_{j,j-1}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

A l'équilibre statique, nous avons :

$$\begin{cases} F_j^m = 0 & j = 1, 2, \dots, n \\ F_{j+1}^m = 0 & j = 0, 2, \dots, n-1 \end{cases} \tag{3.12}$$

La résolution de l'équation (3.12), donne :

$$\begin{cases} M_j = \frac{\mu_0 M_j}{4\pi g d^2} Q'^2 (M_{j-1} - M_{j+1}) & j = 1, 2, \dots, n \\ M_{j+1} = \frac{\mu_0 M_{j+1}}{4\pi g d^2} Q'^2 (M_j - M_{j+2}) & j = 0, 2, \dots, n-1 \end{cases} \tag{3.13}$$

D'après l'équation (3.13), on obtient :

$$M_{j-1} - M_{j+1} = M_j - M_{j+2} \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \tag{3.14}$$

Ce qui permet de trouver :

$$k_{j,j+1} = k_{j+1,j} \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \tag{3.15}$$

3.2.5 Puissance récupérable par le circuit électrique

La récupération d'énergie électromagnétique est assurée par $(n-1)$ bobines indépendantes. Les oscillations des aimants mobiles provoquent la variation du champ magnétique dans la zone de séparation, ce qui fournit un courant induit (loi de Lenz). Le courant induit est exprimé en fonction de la vitesse de vibration ($\dot{v}_j(t) = V_j \Omega \sin(\Omega t)$). La puissance électrique instantanée

$P(t)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$P(t) = P_{Charge}(t) + P_{Perdu}(t) = \sum_{j=1}^{n+1} (R_j + r_{int}) i_j^2 \quad (3.16)$$

Pour que la puissance récupérable ne soit pas perdue par effet Joule, on suppose que $P_{Charge}(t) \gg P_{Perdu}(t)$ ce qui donne $R_j \gg r_{int}$. D'après les relations (3.6), (3.7) et (3.8), l'équation (3.16) peut être écrite comme suit :

$$P(t) = \frac{\Omega^2}{2} \left(\sum_{j=1}^{n+1} (c_{ej} (V_{j-1} - V_j)^2) \right) (1 - \cos(2\Omega t)) \quad (3.17)$$

Lorsque le générateur atteint le régime stationnaire, la puissance moyenne fournie à la charge électrique prend la forme suivante :

$$P_m = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} P(t) dt = \frac{\Omega^2}{2} \left(\sum_{j=1}^{n+1} (c_{ej} (V_{j-1} - V_j)^2) \right) \quad (3.18)$$

La stratégie proposée a l'avantage d'éviter la différence de phase entre les courants induits. Cependant, elle nécessite des circuits complexes afin de distribuer l'énergie séparément.

3.2.6 Procédure de résolution

La procédure de résolution se fait en fonction de la méthode HBM couplée avec la méthode ANM [116]. Cette technique permet de donner des solutions périodiques au système dynamique.

Pour résoudre le système différentiel non-linéaire (3.10) à n ddl et pour déterminer la puissance récupérée (3.18), on écrit le système d'équation suivant $\forall j \in [1, n]$:

$$\dot{w} = f(t, w, \Omega) \quad (3.19)$$

Avec w est un paramètre inconnu et f est une fonction périodique.

Pour appliquer la méthode HBM, on commence par la transformation de l'équation (3.19) en un système quadratique (3.20) :

$$m(\dot{Z}) = c(t, \Omega) + l(Z) + q(Z, Z) \quad (3.20)$$

c est un vecteur constant, $l(\cdot)$ est un vecteur linéaire et $q(\cdot, \cdot)$ est un vecteur quadratique.

Le système (3.19) peut être reformulé comme un système de premier ordre à travers l'introduction des variables suivants :

$$\begin{aligned} u_j &= \dot{v}_j, w_j = v_j^2; \forall j \in [1, n-2] \\ w_{j(j+1)} &= v_j v_{j+1}; \forall j \in [1, n-3] \\ r_1 &= \Omega, r_2 = Y_0 \cos(\Omega t), r_3 = \Omega^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

La forme matricielle du système d'équation (3.19) a la forme suivante :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c}
 \dot{v}_j & = & 0 & + & u_j & + & 0 & + & 0 \\
 \dot{u}_j & = & 0 & + & Ul_j & + & 0 & + & Uq_j \\
 0 & = & 0 & - & w_j & + & 0 & + & v_j^2 \\
 0 & = & 0 & - & w_{j(j+1)} & + & 0 & + & v_j v_{j+1} \\
 0 & = & 0 & - & r_1 & + & \Omega & + & 0 \\
 0 & = & Y_0 \cos(\Omega t) & - & r_2 & + & 0 & + & 0 \\
 0 & = & 0 & - & r_3 & + & 0 & + & r_1^2 \\
 0 & = & 0 & + & P & + & 0 & + & Pq
 \end{array} \\
 \hline
 m(\dot{Z}) & = & c(t, \Omega) & + & l(Z) & + & \Omega l_{c1} & + & q(Z, Z)
 \end{array} \quad (3.22)$$

Avec :

$$Ul_j = \begin{pmatrix} -\frac{c+ce_{j-1}+ce_j}{M_j} u_j + \frac{ce_j}{M_j} u_{j+1} + \frac{ce_{j-1}}{M_j} u_{j-1} \\ -\frac{k_{j(j+1)}}{M_j} (v_j - v_{j+1}) - \frac{k_{j(j-1)}}{M_j} (v_j - v_{j-1}) \\ -\frac{\alpha_{j(j+1)}}{M_j} (w_j + w_{j+1} - 2w_{j(j+1)}) \\ +\frac{\alpha_{j(j-1)}}{M_j} (w_j + w_{j-1} - 2w_{j(j-1)}) \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$Uq_j = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_{j(j+1)}}{M_j} (v_j w_j - v_{j+1} w_{j+1} + 3v_j w_{j+1} - 3w_j v_{j+1}) \\ -\frac{\lambda_{j(j-1)}}{M_j} (v_j w_j - v_{j-1} w_{j-1} + 3v_j w_{j-1} - 3w_j v_{j-1}) + r_3 r_2 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$Pq = -\frac{r_3}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (ce_j (w_j + w_{j+1} - 2w_{j(j+1)})) \quad (3.25)$$

$Z = [v_1 \dots v_n \ u_1 \dots u_n \ w_1 \dots w_n \ w_{12} \dots w_{(n-1)(n)} \ r_1 \ r_2 \ r_3 \ P]^T$ est un vecteur de taille $N_{eq} = 4(n-2) + 3$, $c(t, \Omega)$, l_{c1} sont des vecteurs constants, $m(\dot{Z})$ et $l(Z)$ sont des vecteurs linéaires et $q(Z, Z)$ est un vecteur quadratique.

La méthode HBM est appliquée au système d'équation (3.22). On décompose le vecteur $Z(t)$ en série de Fourier suivante :

$$Z(t) = Z_0 + \sum_{k=1}^H Z_{c,k} \cos(k\Omega t) + \sum_{k=1}^H Z_{s,k} \sin(k\Omega t) \quad (3.26)$$

La taille du vecteur U est $(2H+1)N_{eq}$, où N_{eq} est le nombre des équations. On peut décomposer les éléments du vecteur U en série de Fourier, à travers cette formulation :

$$U = [Z_0^T + Z_{c,1}^T + Z_{s,1}^T + Z_{c,2}^T + Z_{s,2}^T + \dots + Z_{c,H}^T + Z_{s,H}^T]^T \quad (3.27)$$

En substituant l'équation (3.27) dans l'équation (3.22), et en assemblant les termes de même harmonique et en négligeant les termes de grande ordres, on obtient le système d'équations suivant :

$$\Omega M(U) = C + L(U) + Q(U, U) \quad (3.28)$$

La taille de ce système est $(2H + 1) \times N_{eq}$. Les matrices C , $L(\cdot)$, $M(\cdot)$ et $Q(\cdot, \cdot)$ dépendent des opérateurs c , $l(\cdot)$, $m(\cdot)$ et $q(\cdot, \cdot)$ de l'équation (3.22).

3.3 Résultats et discussion

3.3.1 Spécifications d'un récupérateur non-linéaire à un seul ddl

Dans ce chapitre, nous commençons par la détermination de la réponse d'un seul aimant en lévitation sous une excitation harmonique comme le montre la Figure 3.4. De plus, les calculs et les procédures de résolution pour ce type de problème existent dans la littérature [1], ils sont limités à des oscillateurs légèrement non linéaires et la dépendance de l'amplitude à la fréquence d'excitation n'est pas prise en compte.

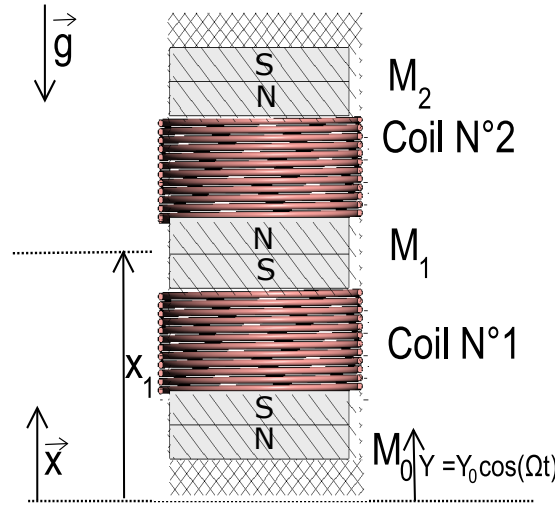


FIGURE 3.4 – Générateur électromagnétique composé d'un seul aimant en lévitation magnétique.

Pour $n = 1$, l'équation de mouvement d'un récupérateur électromagnétique en lévitation magnétique s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} M_1 \ddot{v}_1 + (c + c_{e1} + c_{e2}) \dot{v}_1 + (k_{12} + k_{10}) v_1 \\ + (\alpha_{12} - \alpha_{10}) v_1^2 + (\lambda_{12} + \lambda_{10}) v_1^3 \end{pmatrix} = -M_1 \ddot{Y} \quad (3.29)$$

La fréquence propre de l'oscillateur linéaire s'écrit comme suit :

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{12} + k_{10}}{M_1}} \quad (3.30)$$

En substituant l'équation (3.11) dans (3.30), la fréquence de résonance devient :

$$f_r = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{g(M_0 + M_2)}{2d(M_0 - M_2)}} \quad (3.31)$$

Comme donné par l'inégalité (3.14), nous avons $M_0 \geq M_2$. Nous remarquons que la fréquence propre dépend uniquement des masses des deux aimants fixes. Nous introduisons la fréquence de résonance initiale $f_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{g/2d}$ et le paramètre adimensionnel $\mu = M_2/M_0$. L'équation (3.31) devient :

$$f_r = f_0 \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} \quad (3.32)$$

La Figure 3.5 illustre la variation de la fréquence naturelle d'un seul aimant en lévitation par rapport au paramètre sans dimension μ et le gap séparant les aimants. Nous remarquons que lorsque $\mu = 0$, c'est à dire $M_2 = 0$, la fréquence de résonance f_r atteint sa valeur minimale f_0 . Ce qui correspond au cas d'une seule force répulsive générée par l'aimant M_0 .

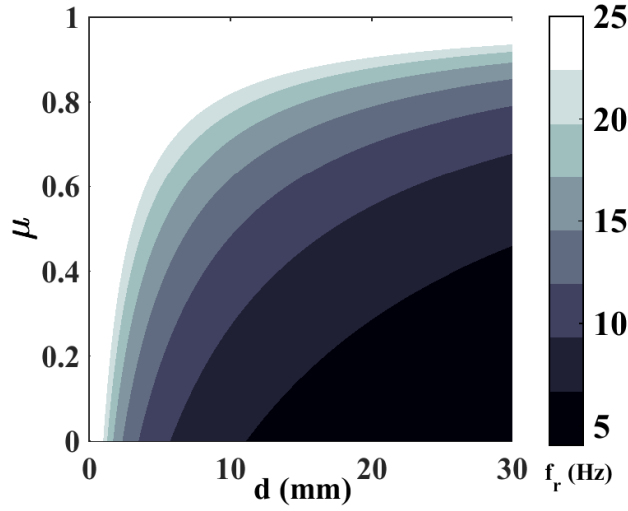


FIGURE 3.5 – Variation de la fréquence naturelle pour un récupérateur à un seul aimant mobile par rapport à la distance du gap d et le rapport massique μ . [142]

De plus, l'équation (3.32) est incompatible pour le cas où nous avons $M_2 = M_0$ en raison de la multistabilité de la position d'équilibre statique.

En substituant l'équation (3.11) dans (3.29) et en divisant par M_1 , nous obtenons l'équation suivante :

$$\ddot{v}_1 + 2\xi w_r \dot{v}_1 + w_r^2 v_1 - \frac{3g}{2d^2} v_1^2 + \frac{2w_r^2}{d^2} v_1^3 = \kappa \cos(\Omega t) \quad (3.33)$$

Avec $w_r = 2\pi f_r$, $\xi = \frac{c+c_{e1}+c_{e2}}{2M_1 w_r}$ et $\kappa = Y_0 \Omega^2$.

L'équation (3.33) est une équation de Duffing avec une non-linéarité quadratique sous excitation harmonique. Pour analyser l'équation du mouvement, nous utilisons la technique de

perturbation qui est adaptée pour les petites variations d'excitation et d'amortissement [1]. Afin de faciliter l'utilisation de l'approche de perturbation, nous proposons la méthode de calcul de la moyenne [144] pour sa simplicité d'utilisation. Nous introduisons l'amplitude suivante :

$$v_1 = A(t) \cos [\Omega t + \beta(t)] \quad (3.34)$$

De plus, dans le voisinage de la fréquence de résonance, nous introduisons le paramètre de réglage σ , qui est donné par :

$$\Omega = w_r + \varepsilon \sigma \quad (3.35)$$

Avec ε le paramètre de perturbation. La détermination de \dot{A} et $\dot{\beta}$ est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{1}{2w_r} [\kappa \sin \beta - 2\xi w_r^2 A] \\ \dot{\beta} = -\sigma + \frac{1}{2Aw_r} \left[\frac{3w_r^2}{2d^2} A^3 + \kappa \cos \beta \right] \end{cases} \quad (3.36)$$

En régime permanent, $\dot{A} = \dot{\beta} = 0$, ce qui correspond à un point fixe dans la section de Poincaré. Ainsi, la réponse fréquentielle peut s'écrire sous sa forme paramétrique par rapport à la phase β :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{3\kappa^2}{16d^2\xi^2w_r^3} \sin^2 \beta + \xi w_r \cot \beta \\ A = \frac{\kappa}{2\xi w_r^2} \sin \beta \end{cases} \quad (3.37)$$

L'amplitude critique A_c est l'amplitude d'oscillation au dessus de laquelle se produit la bistabilité [105, 145]. Donc, A_c est l'amplitude de transition entre le comportement linéaire et non-linéaire. La courbe d'amplitude et de phase présente une pente infinie au point critique. Mathématiquement, A_c est l'amplitude critique pour laquelle l'équation $\frac{d\sigma}{d\beta} = 0$ a une unique solution $\beta_c = \frac{\pi}{3}$. Ainsi, la force critique est donnée comme suit :

$$\kappa_c = \frac{8\sqrt{2}}{3^{4/3}} d \xi^{3/2} w_r^2 \quad (3.38)$$

L'amplitude critique A_c est obtenue en substituant l'équation (3.38) dans (3.37) au point $\beta = \pi/2$.

$$A_c = \frac{4\sqrt{2}}{3^{4/3}} d \sqrt{\xi} \quad (3.39)$$

TABLE 3.1 – Les paramètres de conception pour un récupérateur à un seul degrés de liberté

Paramètre	M_0	M_1	M_2	c_{e1}	c_{e2}	c	d
	(g)	(g)	(g)	(Ns/m)	(Ns/m)	(Ns/m)	(mm)
Valeur	80	80	10	0.303	0.303	0.119	15

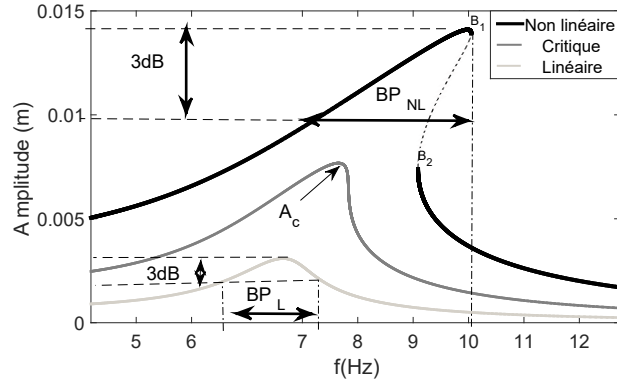


FIGURE 3.6 – Réponses fréquentielles forcées du récupérateur 1ddl. Les paramètres de conception sont indiquées dans le tableau 3.1 pour les trois configurations : linéaire ($Y_0 = 0,7$ mm), critique ($Y_0 = 2$ mm) et non linéaire ($Y_0 = 4,8$ mm). Les lignes continues indiquent les solutions périodiques stables et les lignes en pointillé indiquent les solutions instables.

La Figure 3.6 donne la variation de la réponse en fréquence par rapport à l'amplitude d'excitation pour les paramètres de conception indiquées dans le Tableau 3.1. Ces paramètres ont été choisis pour obtenir un récupérateur à un seul ddl résonant à une fréquence en dessous de 10 Hz ($f_r = 6,5$ Hz) avec un amortissement électromagnétique faible. Pour des amplitudes supérieures à l'amplitude critique, la définition de la bande passante est déterminée par rapport au point de bifurcation le plus élevé. En particulier, la bande passante est nettement élargie lorsque l'aimant mobile oscille dans le régime non-linéaire.

3.3.2 Étude paramétrique d'un récupérateur d'énergie à 2 ddl

Pour $n = 2$, l'équation (3.10) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} M_1 \ddot{v}_1 + (c + c_{e1} + c_{e2})\dot{v}_1 - c_{e2}\dot{v}_2 \\ + k_{12}(v_1 - v_2) + k_{10}v_1 + \alpha_{12}(v_1 - v_2)^3 \\ - \alpha_{10}v_1^2 + \lambda_{12}(v_1 - v_2)^3 + \lambda_{10}v_1^3 \end{pmatrix} = -M_1 \ddot{Y} \\ \begin{pmatrix} M_2 \ddot{v}_2 + (c + c_{e2} + c_{e3})\dot{v}_2 - c_{e2}\dot{v}_1 \\ + k_{21}(v_2 - v_1) + k_{23}v_2 + \alpha_{21}(v_2 - v_1)^3 \\ - \alpha_{23}v_2^2 + \lambda_{21}(v_2 - v_1)^3 + \lambda_{23}v_2^3 \end{pmatrix} = -M_2 \ddot{Y} \end{cases} \quad (3.40)$$

Dans cette section, nous utilisons le couplage magnétique non linéaire entre les oscillateurs pour augmenter la bande passante et la puissance récupérable du générateur considéré.

Afin de garantir la symétrie de la matrice de rigidité, nous avons la relation suivante :

$$M_3 + M_0 = M_1 + M_2 \quad (3.41)$$

En respectant la condition (3.41), les fréquences propres sont écrites comme suit :

$$\Omega_1^2, \Omega_2^2 = \left(\frac{1}{2} \left\{ \frac{(k_{12} + k_{10})M_2 + (k_{23} + k_{21})M_1}{M_1 M_2} \right\} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\left\{ \frac{(k_{12} + k_{10})M_2 + (k_{23} + k_{21})M_1}{M_1 M_2} \right\}^2 - 4 \left\{ \frac{(k_{12} + k_{10})(k_{23} + k_{21}) - k_{12}k_{21}}{M_1 M_2} \right\} \right]} \right) \quad (3.42)$$

Pour améliorer la bande passante du récupérateur, nous minimisons la distance qui sépare les fréquences naturelles exprimées dans l'équation (3.42), ce qui nous donne les conditions suivantes :

$$M_1 = M_0 - M_3; M_2 = 2M_3; M_0 > 2M_3 . \quad (3.43)$$

La distance fréquentielle $f_2 - f_1$ est tracée par rapport à M_0 et M_3 , comme illustré dans la Figure 3.7. Nous remarquons que la condition $f_2 - f_1 < 4.3\text{Hz}$ n'est pas vérifiée pour les régions 1 et 2 qui sont séparées par une zone optimale pour laquelle $f_2 - f_1 < 4.3\text{Hz}$. Pour un point particulier dans cette région, l'ensemble des paramètres de conception est donné dans le tableau 3.2.

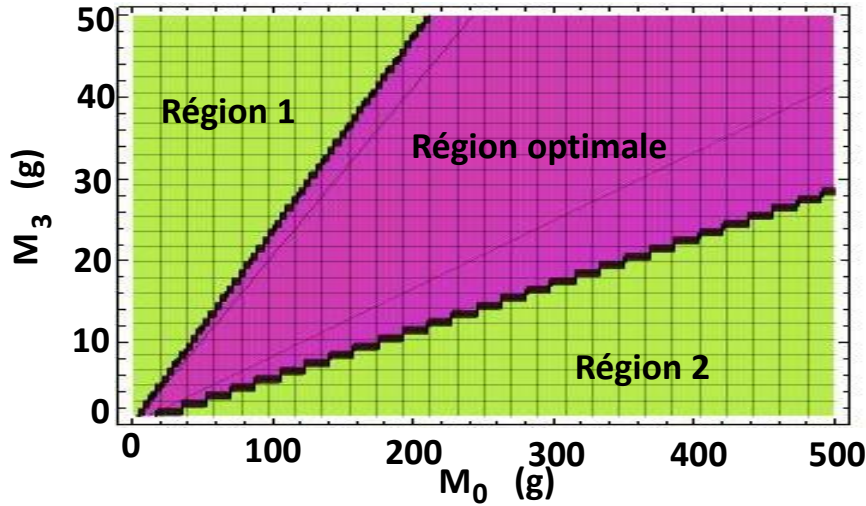


FIGURE 3.7 – Variation de la distance séparant les fréquences propres du récupérateur à 2ddl par rapport à M_0 et M_3 . La région optimale est obtenue pour $f_2 - f_1 < 4.3\text{Hz}$. [146]

TABLE 3.2 – Les paramètres de conception pour un récupérateur à 2 ddl

Paramètre	M_0	M_1	M_2	M_3 (g)	c_{e1}	c_{e2}	c	d
	(g)	(g)	(g)		(Ns/m)	(Ns/m)	(Ns/m)	(mm)
Valeur	125	19.5	20	10	0.123	0.123	0.119	15

La Figure 3.8 donne la variation de la réponse fréquentielle en fonction de la puissance récupérée pour différentes valeurs de l'amplitude d'excitation Y_0 . Nous remarquons que la bistabilité apparaît pour les grandes amplitudes d'excitation ($Y_0 > 2\text{ mm}$). Lorsque la fréquence

est à l'intérieur de la plage d'instabilité limitée par deux points de bifurcation, la réponse dynamique a deux solutions. Par conséquent, nous pouvons profiter de l'effet raidissant non linéaire pour élargir la bande de fréquence du récupérateur d'énergie.

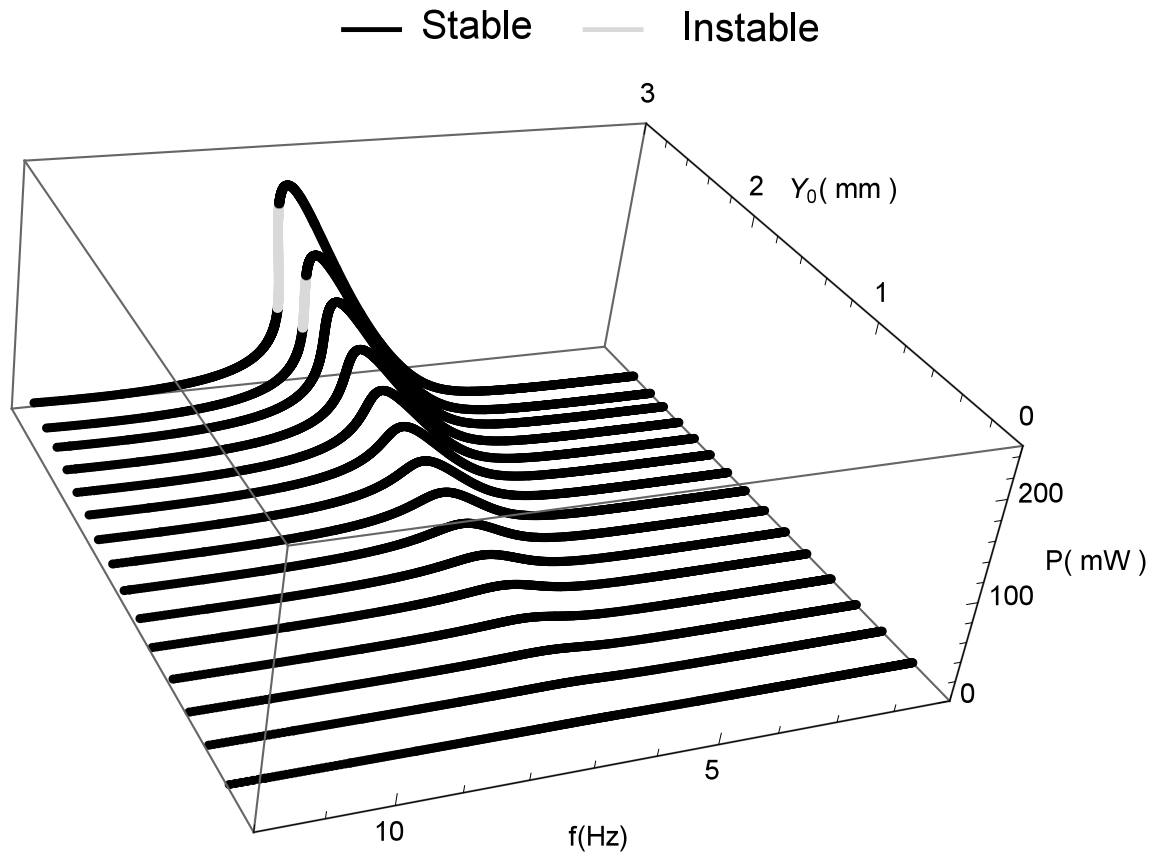


FIGURE 3.8 – Variation de la puissance récupérée en fonction de la fréquence d'excitation pour différentes amplitudes d'excitation. Les lignes noires indiquent les solutions périodiques stables et les lignes grises indiquent les solutions périodiques instables. [146]

On propose l'utilisation de la densité de puissance normalisée comme critère de performance. D'après la Figure 3.9, on remarque que la puissance normalisée varie légèrement lorsque l'amplitude de l'excitation Y_0 varie.

3.3.3 Optimisation multiobjectifs d'un récupérateur d'énergie à deux ddl

Puisque l'étude paramétrique n'est pas suffisante pour déterminer les meilleures performances du système dynamique à plusieurs variables de conception, on propose l'application d'une procédure d'optimisation multi-objectif. Ainsi, on définit deux fonctions objectifs g_1 et g_2 : la première fonction g_1 est liée à la distance entre les deux fréquences naturelles f_1 et f_2 tandis que la seconde fonction objectif g_2 est liée à la distance entre les puissances récupérées aux fréquences de résonance.

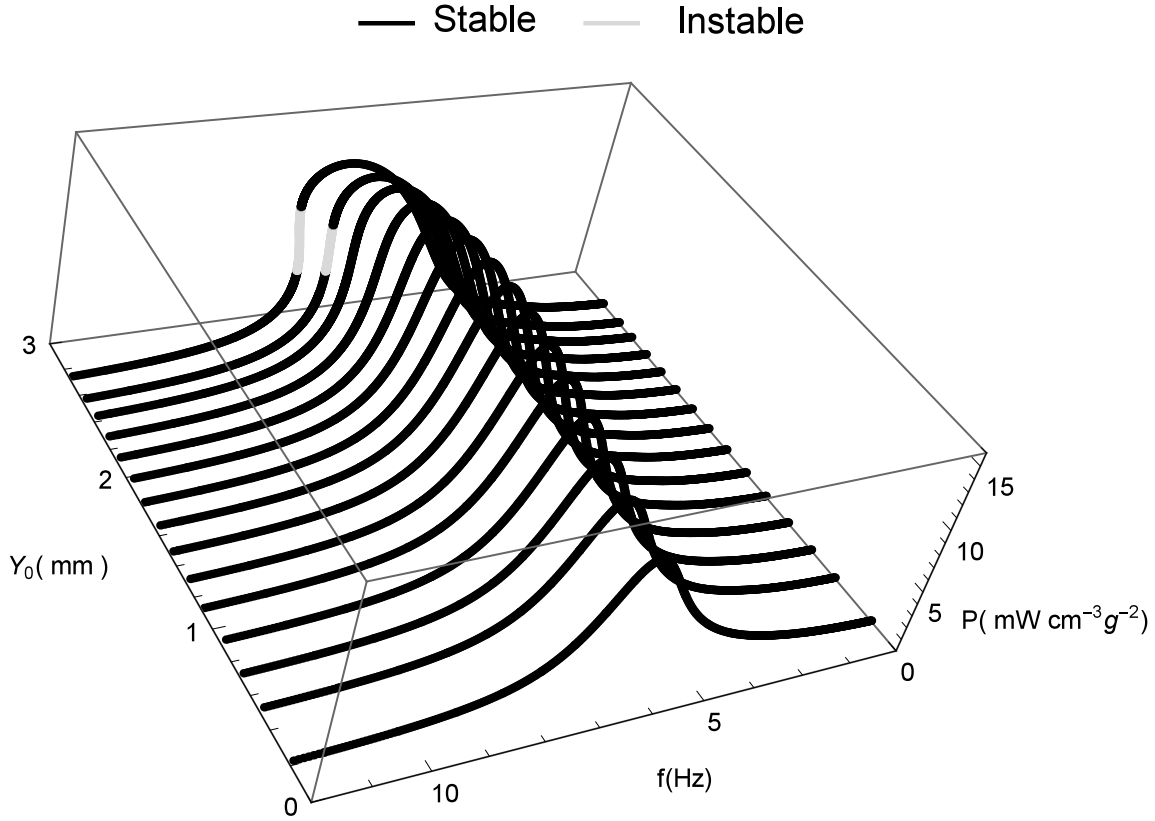


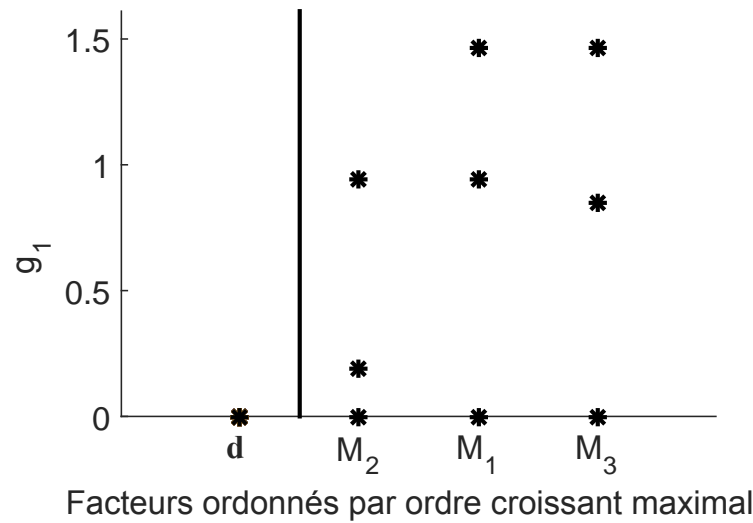
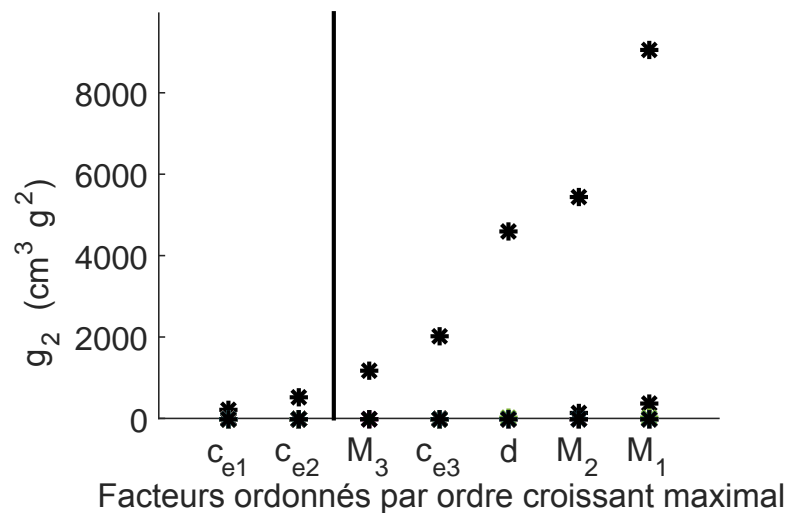
FIGURE 3.9 – Variation de la puissance normalisée en fonction de la fréquence d'excitation pour différentes amplitudes d'excitation. Les lignes noires indiquent les solutions périodiques stables et les lignes grises indiquent les solutions périodiques instables. [146]

$$\begin{cases} g_1 = \frac{f_2 - f_1}{f_1} \\ g_2 = \frac{|P_1 - P_2|}{P_{n1}} \end{cases} \quad (3.44)$$

Avec P_1 et P_{n1} sont respectivement la puissance récupérée et la puissance normalisée à la fréquence f_1 (équation (3.18) pour $\Omega = \Omega_1 = 2\pi f_1$) et P_2 est la puissance récupérée à la fréquence f_2 (équation (3.18) pour $\Omega = \Omega_2 = 2\pi f_2$).

Étant donné que g_1 et g_2 dépendent de plusieurs paramètres de conception, une analyse de sensibilité (SA) a été réalisée comme première étape dans le but de sélectionner les paramètres non influents qui sont maintenus constants. Parmi les méthodes d'analyse de sensibilité, la méthode de Morris est une analyse de sensibilité aléatoire [137] et son efficacité a été améliorée en utilisant l'échantillonnage latin hypercube au lieu de l'échantillonnage aléatoire et les points radiaux au lieu des trajectoires [147].

Cette méthode est utilisée pour déterminer la limite entre les paramètres de grande influence et faible influence. Les paramètres de conception sont c_{e1} , c_{e2} , c_{e3} , M_1 , M_2 , M_3 et d_0 . Cette limite est définie comme la première variation est égale ou supérieure à d_{max}/γ , avec d_{max} est la plus grande distance entre les deux éléments consécutifs maximales et $\gamma = 10$.

FIGURE 3.10 – Application de la méthode de Morris adaptée à la fonctions objectif g_1 .FIGURE 3.11 – Application de la méthode de Morris adapté à la fonctions objectives g_2 .

La Figure 3.10 montre que la première fonction objectif g_1 ne dépend que de la masse des aimants. La Figure 3.11 montre que les paramètres d'amortissement électromagnétiques c_{e1} et c_{e2} ont une faible influence sur la variation de la seconde fonction objectif g_2 . Par conséquent, c_{e1} et c_{e2} sont maintenus constants dans la procédure d'optimisation décrite ci-dessous.

Pour améliorer les performances du récupérateur non linéaire à deux ddl, les pics de résonance doivent être très proches les uns des autres en termes de fréquence de résonance et de niveau de puissance récupérée. Pour cela, les fonctions objectifs g_1 et g_2 sont utilisées dans le processus d'optimisation (NSGA-II). Les deux fonctions coûts sont simultanément minimisées par rapport aux cinq paramètres de conception (M_1, M_2, M_3, d, c_{e3}).

$$\text{Min}[g_1(x), g_2(x)]$$

$$x = [M_1, M_2, M_3, d, c_{e3}]^T$$

$$\text{Sous les conditions} \quad M_3 + M_0 - M_1 - M_2 = 0 \quad (3.45)$$

$$M_0 \geq M_2$$

$$M_1 \geq M_3$$

L'étude de sensibilité est suivie par une étude d'optimisation globale pour localiser l'optimum local et global pour chaque fonction objectif à l'aide des simulations de Monte Carlo. Ensuite, l'optimisation multiobjectifs a été réalisée autour de l'optimum global. Les solutions Pareto-optimales sont obtenues par NSGA-II après 200 générations et sont représentées sur la Figure 3.12.

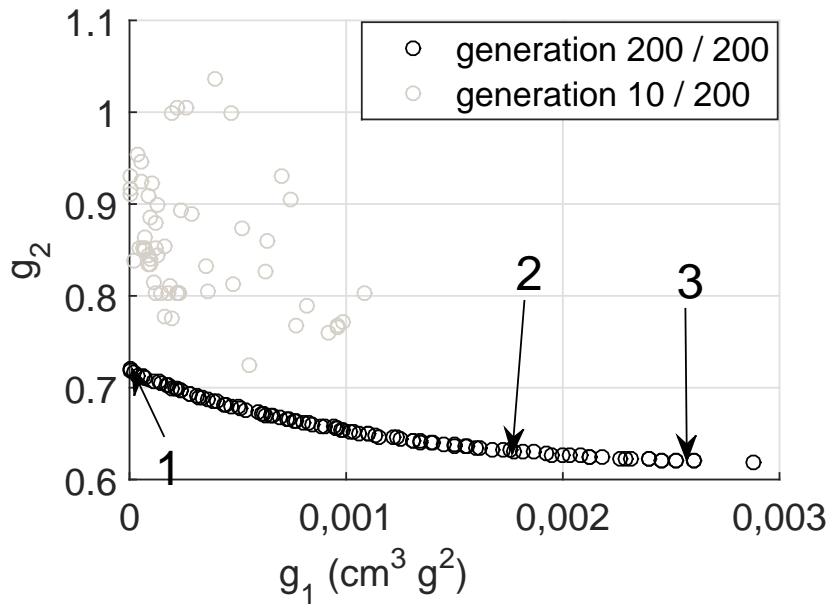


FIGURE 3.12 – Solutions préférées du problème d'optimisation multi-objectif écrits dans l'équation (3.45).

Le front Pareto-optimal est convexe et sa densité et la plage de variation des paramètres varient selon les contraintes de conception. Trois solutions ont été choisies sur le front de Pareto et leurs paramètres de conception correspondants sont indiqués dans le tableau 3.3.

La réponse fréquentielle en fonction de l'amplitude, de la phase et de la puissance récupérée sont affichés dans la Figure 3.13 pour les paramètres de conception de la solution 1 et pour une amplitude d'excitation $Y_0 = 2$ mm. On remarque que les deux aimants mobiles vibrent en phase à une fréquence d'excitation de 5,7 Hz. Ensuite, le déphasage entre les deux signaux augmente

TABLE 3.3 – Les paramètres de conception des trois solutions optimales sélectionnées dans la Figure 3.12.

	Solution N°1	Solution N°2	Solution N°3	Intervalle de variation
$g_1(cm^3g^2)$	$2.5 * 10^{-7}$	$3.6 * 10^{-3}$	$5.2 * 10^{-3}$	
$g_2(\%)$	72.1	62.9	62	
$M_1(g)$	80	80	80	[10-250]
$M_2(g)$	32	31.6	32	[10-250]
$M_3(g)$	10	26.3	32	[10-250]
$c_{e3}(Ns/m)$	0.27	0.71	1.1	[0.1-5]
$d(mm)$	15	15	15	[5-15]
$c_{e1}(Ns/m)$	1.19	1.19	1.19	—
$c_{e2}(Ns/m)$	0.13	0.13	0.13	—
$c(Ns/m)$	0.119	0.119	0.119	—

et atteint un maximum de $\pi/3$ pour une fréquence d'excitation égale à 9,5 Hz. Contrairement au cas d'un seul aimant mobile, la bande passante est mesurée sur la réponse fréquentielle de la puissance à -3dB sur le premier pic comme le montre la Figure 3.13-b. Nous remarquons que la bande passante est très élevée et atteint 120 % par rapport la première fréquence propre.

Les réponses fréquentielles pour les trois solutions choisies sont comparées en terme de puissance normalisée comme donnée par la Figure 3.14. La première solution à la puissance normalisée plus élevée ($10.4mWcm^{-3}g^{-2}$) par rapport aux deux autres solutions . Les résultats des trois solutions de conception sont donnés dans le tableau 3.4 qui confirme que la première solution a les meilleurs performances.

3.3.4 Optimisation multiobjectifs d'un récupérateur d'énergie à 3 ddl

Comme le cas de deux aimants en lévitation, on introduit une procédure d'optimisation multiobjectifs (NSGA-II) adéquate pour $n = 3$. Nous utilisons quatre fonctions objectifs : deux fonctions représentent la distance entre les fréquences propres, tandis que les deux autres fonctions représentent la distance entre les pics de résonance de la puissance récupérée.

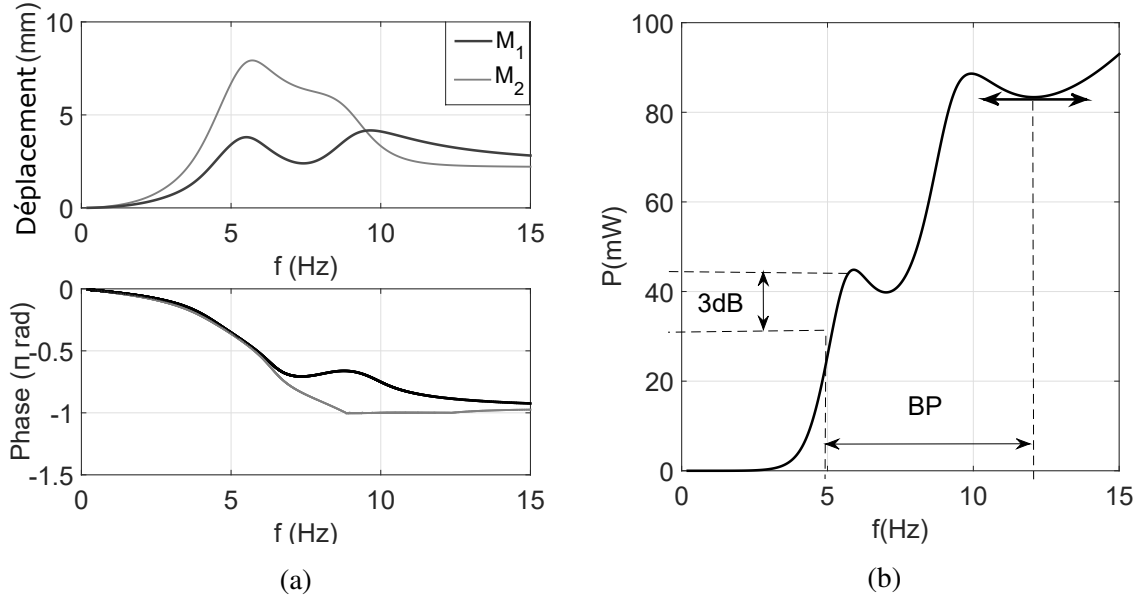


FIGURE 3.13 – Réponses fréquentielles forcées pour un récupérateur à deux degrés de liberté en termes (a) d'amplitude et de phase (b) de puissance récupérée. Les paramètres de conception correspondent à celles de la solution 1 dans le tableau 3.3 avec une amplitude d'excitation $Y_0 = 2$ mm.

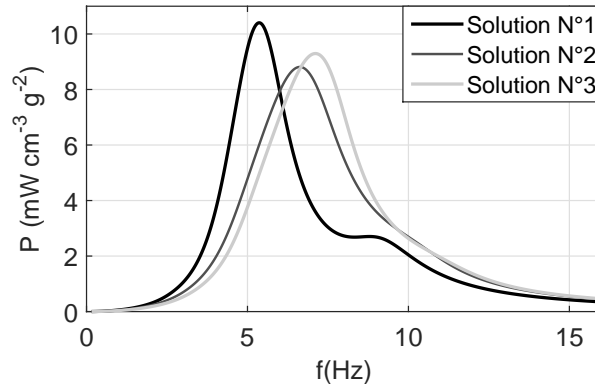


FIGURE 3.14 – Réponses fréquentielle forcées en fonction de la puissance normalisée pour un récupérateur à deux ddl.

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1 = \frac{|P_3 - P_1|}{g_1^* P_{n1}} \\ g_2 = \frac{|P_2 - P_1|}{g_2^* P_{n1}} \\ g_3 = \frac{f_3 - f_1}{g_3^* f_1} \\ g_4 = \frac{f_2 - f_1}{g_4^* f_1} \end{array} \right. \quad (3.46)$$

TABLE 3.4 – Performances du récupérateur à deux degrés de liberté pour les trois solutions optimales sélectionnées dans la Figure 3.14.

Solution N°	1	2	3
$f_1(Hz)$	5.2	6.1	6.5
$f_2(Hz)$	8.9	10	10.6
$P_n(mWcm^{-3}g^{-2})$	10.4	8.8	9.2
$BP(\%)$	120	85	84
$\Delta\phi_{max}(rad)$	$\pi/3$	$0.22 * \pi$	$0.19 * \pi$

Avec g_i^* représente les extremums de la fonction g_i . La méthode de sensibilité de Morris adaptée est utilisée pour éliminer les paramètres ayant une faible influence sur les fonctions objectifs. D'après les figures 3.47 et 3.47, les paramètres de conception retenus sont M_2 , M_3 , M_4 et d .

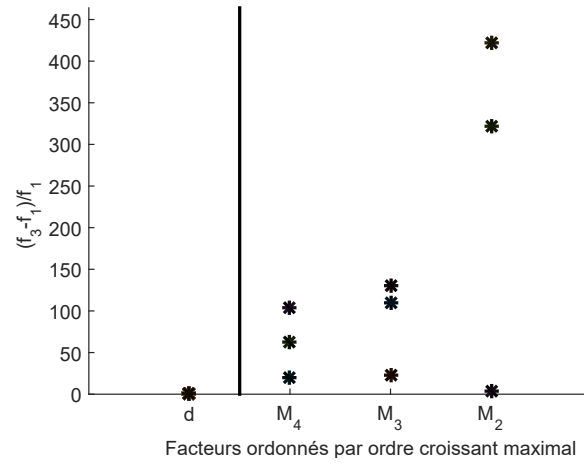


FIGURE 3.15 – Application de la méthode de Morris adaptée à l'écart fréquentielle

Le problème d'optimisation considéré, s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Min} [g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x)] \\ x = [M_2, M_3, M_4, d]^T \end{aligned}$$

Sous les conditions :

$$\begin{aligned} M_1 - M_3 - M_2 + M_4 &= 0 \\ M_0 - M_2 - M_1 + M_2 &= 0 \\ M_0 \geq M_2, M_1 \geq M_3, M_2 \geq M_4 \end{aligned} \quad (3.47)$$

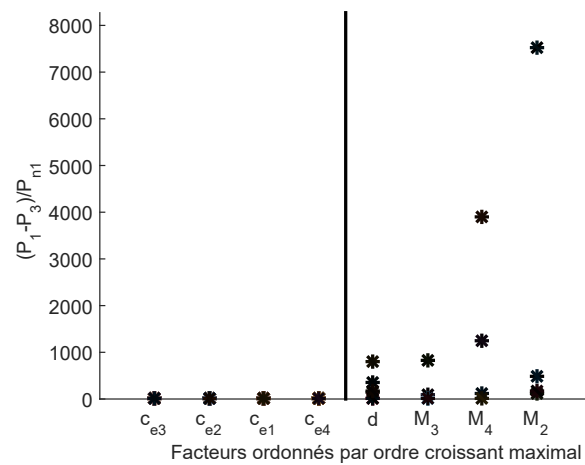


FIGURE 3.16 – Application de la méthode de Morris adaptée à l'écart entre les puissances récupérées

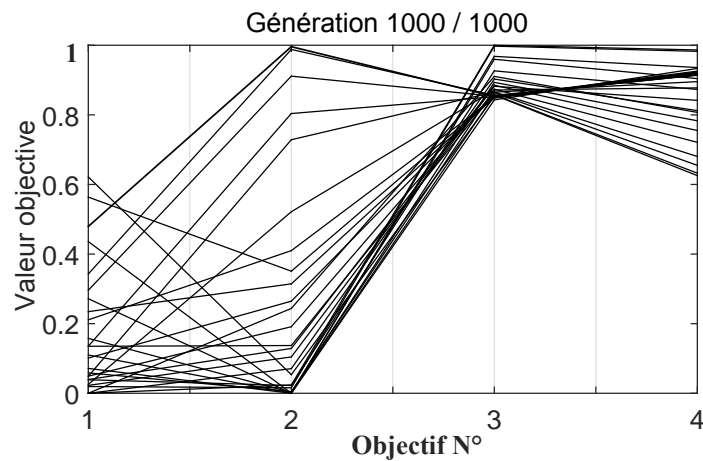


FIGURE 3.17 – Solutions préférées du problème d'optimisation multi-objectifs écrites dans l'équation (3.47)

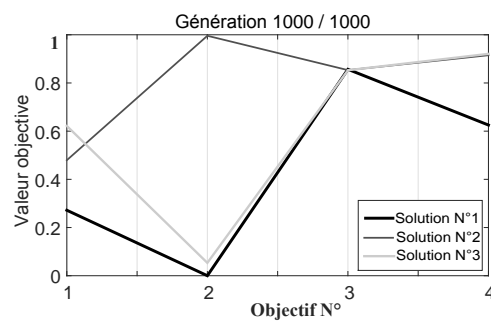


FIGURE 3.18 – Sélection des trois solutions préférées du problème d'optimisation multi-objectifs

TABLE 3.5 – Les paramètres conceptuels des trois solutions optimales sélectionnées dans la Figure 3.18

	Solution N°1	Solution N°2	Solution N°3	Intervalle de variation
g_1	0.27	0.48	0.62	[0 – 1]
g_2	0.01	1	0.05	[0 – 1]
g_3	0.86	0.85	0.85	[0 – 1]
g_4	0.63	0.92	0.92	[0 – 1]
M_2 (g)	90	110	128	[10 – 250]
M_3 (g)	10	67	63	[10 – 250]
M_4 (g)	10	43	50	[10 – 250]
d_0 (mm)	15	15	15	[5 – 15]
c_{e1} (Ns/m)	1.02	1.02	1.02	–
c_{e2} (Ns/m)	0.76	0.76	0.76	–
c_{e3} (Ns/m)	1.24	1.24	1.24	–
c_{e4} (Ns/m)	1.7	1.7	1.7	–
c (Ns/m)	0.119	0.119	0.119	–

Les solutions préférées de la distribution obtenue après 20 populations et 1000 générations sont représentées dans la Figure 3.17. Trois solutions sont choisies dans la Figure 3.18 et leurs paramètres de conception correspondant sont indiqués dans le tableau 3.5. Les réponses fréquentielles en termes d'amplitude, de phase et de puissance récupérée sont données par la Figure 3.19a et la Figure 3.19b pour les paramètres de conception de la solution 1 et pour une amplitude d'excitation $Y_0 = 2,3$ mm.

Les deux aimants mobiles M_2 et M_3 vibrent avec un faible déphasage dans la gamme de fréquences [0 20] Hz. On remarque que le déplacement de M_1 a un faible déphasage par rapport aux déplacements de M_2 et M_3 , jusqu'à une fréquence d'excitation de 6 Hz et atteint un maximum de $2\pi/5$ pour une fréquence d'excitation égale à 11 Hz. Enfin, M_1 et M_3 vibrent en phase pour $f = 15$ Hz.

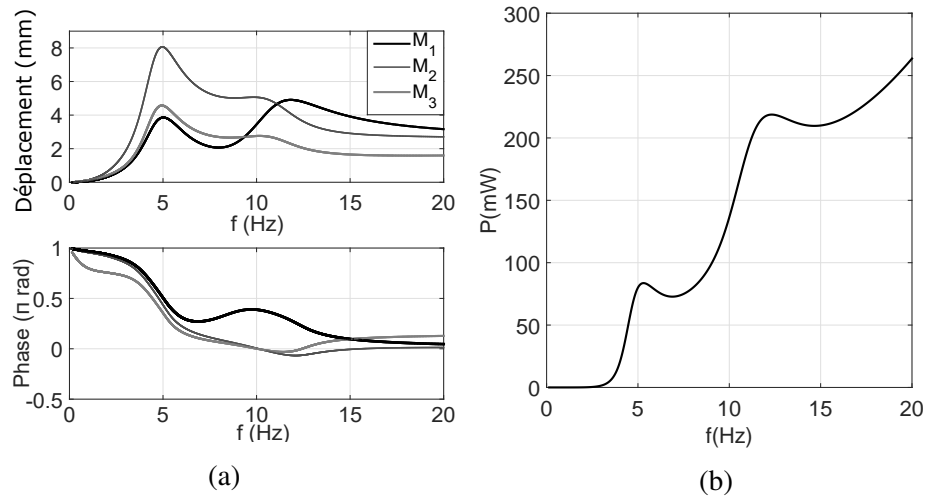


FIGURE 3.19 – Réponses fréquentielles forcées pour un récupérateur à trois ddl en termes (a) d’amplitude et de phase [148] (b) de puissance récupérée. Les paramètres de conception correspondent à celles de la solution 1 dans le tableau 3.5 avec une amplitude d’excitation $Y_0 = 2.3$ mm.

TABLE 3.6 – Performances du récupérateur à 3ddl pour les trois solutions optimales sélectionnées sur la Figure 3.18

	Solution N°1	Solution N°2	Solution N°3
$f_1(Hz)$	4.3	5.4	5.3
$f_2(Hz)$	6.8	9.9	9.7
$f_3(Hz)$	11	13.8	13.5
$P_n(mWcm^{-3}g^{-2})$	20.22	19.42	18.68
$BW(\%)$	190	168	173
$\Delta\Phi(rad)$	$0.39 * \pi$	$\pi/3$	$\pi/3$

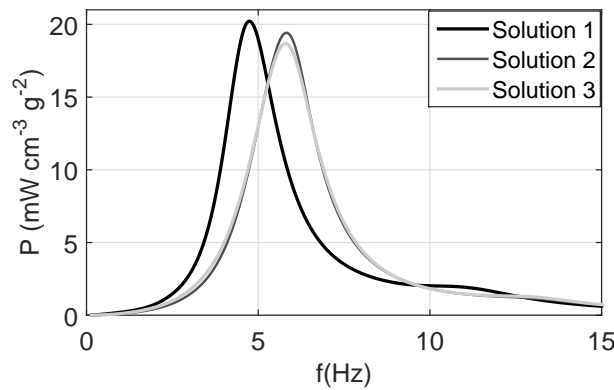


FIGURE 3.20 – Comparaison de la réponse fréquentielle forcée d’un récupérateur à trois ddl en terme de puissance normalisée entre les trois solutions pareto-optimales

Les réponses fréquentielles des trois solutions choisies sont comparées en terme de puissance normalisée comme le montre la Figure 3.20. La puissance normalisée maximale pour la première solution est de l'ordre de $25mWcm^{-3}g^{-2}$. Pour apprécier les bonnes performances de la première solution, les spécifications des trois solutions de conception sont récapitulées dans le tableau 3.6.

3.4 Étude comparative

Pour mettre en évidence les avantages de l'approche de récupération vibratoire multimodale et non-linéaire en termes de bande passante et puissance récoltée, on propose de faire une comparaison entre le générateur proposé et différents récupérateurs basé sur la lévitation magnétique.

3.4.1 Avantages du couplage non-linéaire

Les performances d'un récupérateur composé par deux oscillateur à 1ddl notés VEH_1^1 et VEH_2^1 sont comparées à celles d'un récupérateur à 2ddl noté VEH^2 . Les paramètres de conception pour le récupérateur (2ddl) correspondant à la première solution optimale sont donnés dans le tableau 3.3. La comparaison est obtenue si les paramètres de conception des récupérateurs VEH_1^1 et VEH_2^1 sont choisis de telle sorte que leurs fréquences propres coïncident parfaitement avec celles du récupérateur VEH^2 .

Si nous choisissons la même valeur du gap d , la première fréquence propre du récupérateur VEH^2 est égale à 5.2 Hz. Elle est supérieure à la limite inférieure de la fréquence naturelle du récupérateur à 1ddl $f_0 = \frac{1}{\pi}\sqrt{g/2d}$.

Par conséquent, nous prenons la distance du gap entre les aimants ($d = 24\text{mm}$) pour les deux récupérateurs VEH_1^1 et VEH_2^1 . Les autres paramètres de conception sont les même que ceux du récupérateur VEH^2 sauf les masses des aimants supérieurs qui sont ajustées afin d'assurer une parfaite adéquation entre les fréquences naturelles (Tableau 3.7).

TABLE 3.7 – Les paramètres conceptuels des récupérateurs VEH_1^1 et VEH_2^1 .

Paramètre	M_0 (g)	M_1 (g)	M_2 (g)	c_{e1} (Ns/m)	c_{e2} (Ns/m)	c (Ns/m)	d (mm)
VEH_1^1	80	80	10	1.19	0.13	0.119	24
VEH_2^1	80	32	46	1.19	0.27	0.119	24

Les réponses en fréquence des récupérateurs VEH_1^1 et VEH_2^1 en termes d'amplitude, de phase et de la puissance récupérée sont affichés dans la Figure 3.21a pour les paramètres de conception indiqués dans le tableau 3.7 et pour une amplitude d'excitation $Y_0 = 3\text{ mm}$. Le comportement dynamique du premier récupérateur VEH_1^1 est linéaire alors que le deuxième récupérateur VEH_2^1 est caractérisé par une réponse raidissante en dessous de l'amplitude critique. Le déphasage maximale entre les deux récupérateurs VEH_1^1 et VEH_2^1 est supérieur à $\pi/2$ et la puissance normalisée est d'environ $6,4mWcm^{-3}g^{-2}$. Cette puissance est inférieure à la

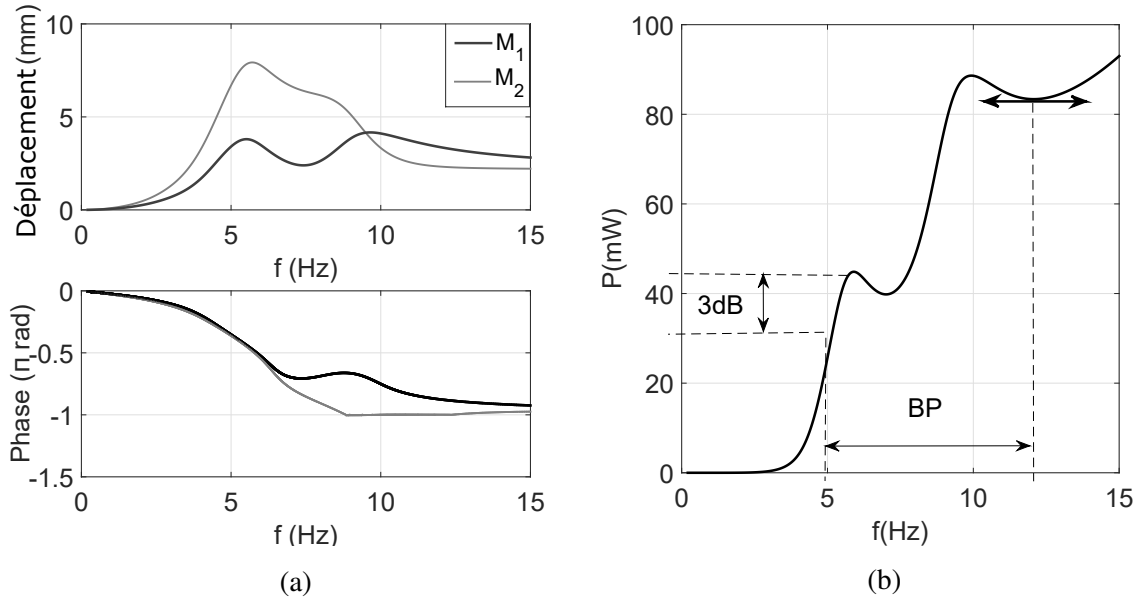


FIGURE 3.21 – Réponse fréquentielle forcée de deux récupérateurs à un seul ddl en termes (a) d'amplitude et de phase (b) de puissance récupérée. Les paramètres de conception sont indiqués dans le tableau 3.7 et l'amplitude d'excitation est $Y_0 = 3$ mm.

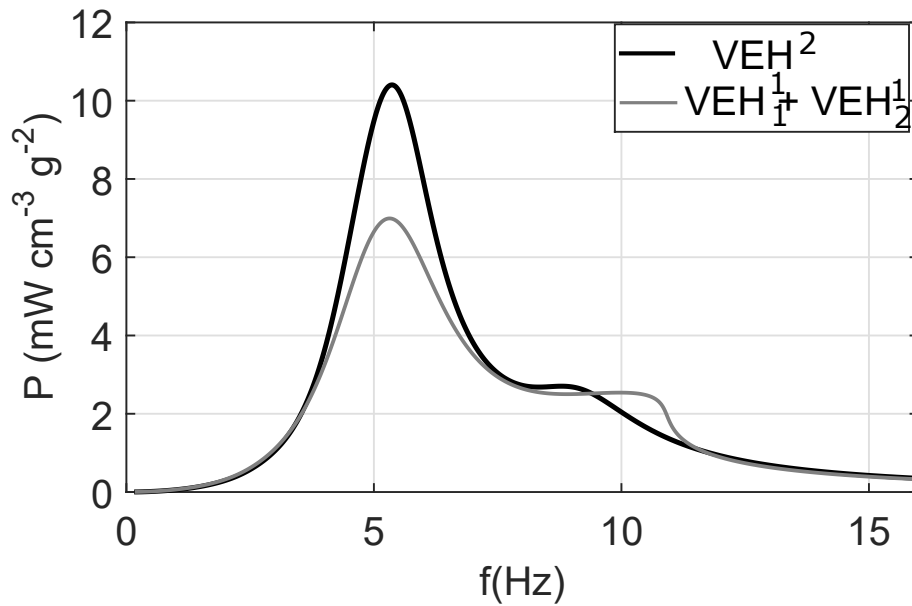


FIGURE 3.22 – Réponses fréquentielles forcées des récupérateurs $VEH_1^1 + VEH_2^1$ et VEH^2 en terme de puissance normalisée.

puissance normalisée qui est récupérable par le récupérateur VEH^2 comme le montre la Figure 3.22.

Les performances du récupérateur VEH^2 sont comparées à celle du récupérateur VEH_1^1

et VEH_2^1 dans le tableau 3.7. Cette comparaison met en évidence les avantages du couplage non linéaire entre les aimants mobiles. En effet, le couplage magnétique non-linéaire conduit à une amélioration de la bande passante à travers l'effet raidissant. Par ailleurs, contrairement au cas de deux récupérateurs à un seul ddl, les paramètres magnétiques sont réglés pour modifier les conditions de couplage de telle sorte que les fréquences propres du récupérateur à 2ddl se rapprochent, et par conséquent les interactions modales augmentent et conduisent à une augmentation de la puissance récupérable.

3.4.2 Avantages de l'interaction modale

Une comparaison est faite en terme de puissance normalisée entre la réponse fréquentielle d'un récupérateur à deux ddl VEH^2 et la réponse fréquentielle d'un récupérateur à trois ddl VEH^3 comme le montre la Figure 3.23. Les paramètres de conception à 3ddls correspondent à ceux de la première solution optimale précités dans le tableau 3.5. Le récupérateur à 3ddls à la puissance normalisée la plus élevée ($20mWcm^{-3}g^{-2}$). Les performances des deux récupérateurs sont indiquée dans le tableau 3.7 et montrant des meilleures performances pour le récupérateur VEH^3 comparé au récupérateur VEH^2 grâce aux effets des interactions modales. Les performances remarquables des récupérateurs proposés basés sur un réseau d'aimants en lévitation sont mises en évidence dans le tableau 3.8 comparées à des récupérateurs magnétiques existants dans la littérature.

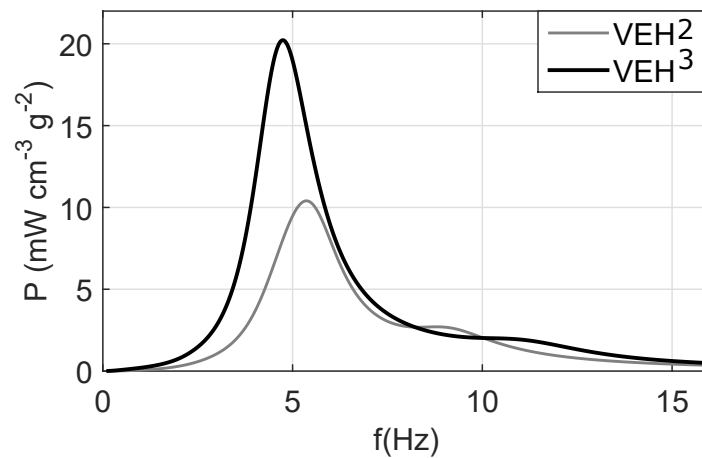


FIGURE 3.23 – Réponses fréquentielles forcées des récupérateurs VEH^2 et VEH^3 en terme de puissance normalisée.

TABLE 3.8 – Comparaison entre les performances de plusieurs récupérateurs d'énergie basés sur la lévitation magnétique et les récupérateurs proposés.

Référence	Fréquence (Hz)	Accélération (g)	Puissance (mW)	Puissance ($\mu W cm^{-3} g^{-2}$)
Abu Riduan et al	7-10	0.5	2.090	104.04
Daniel et al	13	0.25	5.9	15330
Marin et al	47.75-51.75	0.2	25.5	541
Cepnik et al	50	1	20.6	1010
Byung-chul et al	16	0.2	1.52	1070
Current work 2-DOFs	5.1-12	0.33	335	10400
Current work 3-DOFs	4.6-14.5	0.24	795	20220

3.4.3 Conclusion

Dans cette section, nous avons proposé un design de récupération d'énergie vibratoire non-linéaire basé sur un réseau d'aimants en lévitation. Les équations du mouvement ont été déterminées en prenant en compte la non-linéarité magnétique et l'amortissement électromagnétique. Ces équations ont été résolues en utilisant la méthode HBM couplée avec la technique ANM et prenant en compte la variation en fréquence de l'amplitude de l'excitation. Le récupérateur à 1ddl est étudié analytiquement pour extraire l'expression de l'amplitude critique. Ensuite, on a introduit la procédure d'optimisation multiobjectif en utilisant l'algorithme NSGA-II pour les cas de 2ddl et de 3ddl afin de sélectionner les solutions optimales en terme de performances. Les avantages du couplage non linéaire ont été mises en évidence en comparant les performances d'un récupérateur composé de deux générateurs 1ddl découplés VEH_1^1 et VEH_2^1 avec un récupérateur à 2ddl (VEH^2).

Le générateur VEH^2 permet la récupération d'énergie vibratoire dans une gamme de fréquence entre 5.1 et 12 Hz, une bande passante de 120% et une puissance récupérable normalisée de $10.4 mW cm^{-3} g^{-2}$. De plus, le récupérateur à 3ddl est plus performant que les deux premiers récupérateurs dans la gamme de fréquences entre 4.6 et 14.5 Hz avec une bande passante de 190% et pour une puissance récupérée normalisée de $20.2 mW cm^{-3} g^{-2}$, ce qui met en évidence les avantages des interactions modales.

Le design du récupérateur d'énergie vibratoire non-linéaire basé sur un réseau de plusieurs aimants en lévitation peut être obtenu grâce au concept proposé dans ce chapitre. Les performances de ce générateur peuvent être rendu optimale en exploitant simultanément la non-linéarité et la multi-modalité dans une large bande fréquence.

Dans le chapitre suivant, on met à profit le caractère non-linéaire à la fois magnétique et géométrique et la multimodalité pour étendre le concept de récupération d'énergie vibratoire à un réseau de poutre en grands déplacements transverses. Les non-linéarités de couplage magnétique permettent d'augmenter les performances du récupérateur d'énergie vibratoire.

Chapitre 4

Réseau périodique de poutres en grands déplacements avec couplage magnétique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on exploite les propriétés de la non-linéarité géométrique, de la périodicité du réseau et de la force de couplage magnétique non-linéaire pour augmenter les performances d'un récupérateur d'énergie vibratoire. Ces différents avantages ont pour objectif principal d'élargir la bande passante et d'augmenter la puissance récupérable. De même, une étude de sensibilité suivie d'une étude d'optimisation multiobjectifs permet d'améliorer les performances du système de récupération d'énergie. Dans un premier temps, un modèle discret équivalent à quelques ddl (1,2 ou 3) est d'abord proposé : Il contient les raideurs non-linéaires géométriques et magnétiques. Ensuite, le modèle analytique proposé du mouvement non-linéaire couplé est calculé en utilisant le principe d'Hamilton étendu et discrétisé en appliquant la procédure de Galerkin. Ce modèle d'ordre réduit résultant est résolu numériquement en utilisant la méthode (HBM) couplée à la méthode asymptotique numérique (MAN). Plusieurs simulations numériques ont été réalisées afin d'optimiser les performances de récupération d'énergie de vibration multimodale.

4.2 Modélisation du système dynamique

4.2.1 Description du générateur proposé

Mahmoudi et al. [3] ont modélisé un récupérateur non-linéaire hybride d'énergie vibratoire ambiante en se basant sur un design d'un récupérateur à transduction électromagnétique (Figure 4.1).

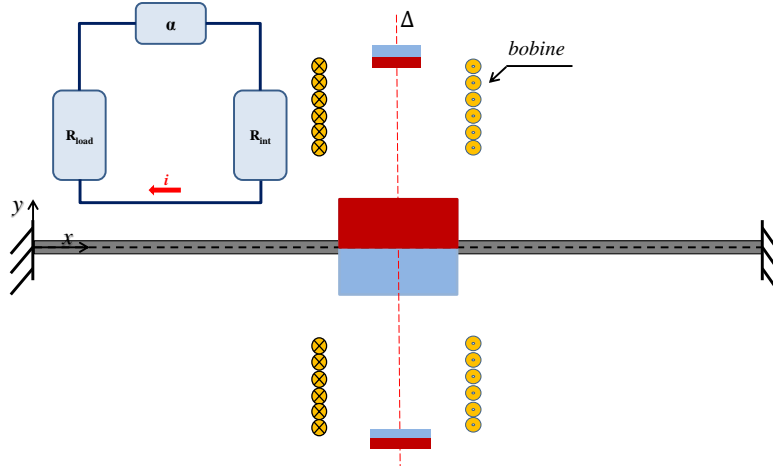


FIGURE 4.1 – Poutres en grands déplacements sous excitation à la base. [3]

Afin d'améliorer les performances du récupérateur à 1 ddl, le récupérateur illustré par la Figure (4.2) est composé de n poutres identique bi-encastées et couplées magnétiquement par n aimants mobiles M_1, M_2, \dots et M_n . Chaque aimant est fixé au milieu de chaque poutre. L'ensemble est placé entre deux aimants fixes M_0 et M_{n+1} en bas et en haut. Les pôles magnétiques sont orientés de telle sorte que des forces répulsives soient créées entre chaque deux aimants adjacents.

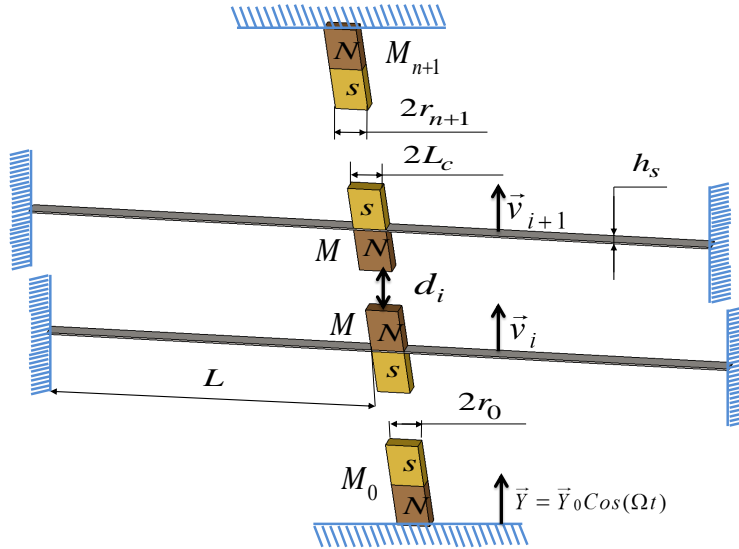


FIGURE 4.2 – Réseau de poutres en grands déplacements sous excitation à la base. [149]

Ces forces induisent une rigidité magnétique non-linéaire. Une bobine est enroulée horizontalement autour de la zone de séparation entre deux aimants adjacents. Lorsque le dispositif de récupération est soumis à une excitation harmonique à la base $Y(t)$, chaque aimant mobile oscille autour de sa position d'équilibre. Un courant induit se produit dans chaque bobine comme

représenté sur la Figure 4.3. Le récupérateur électromagnétique est constitué de $n+1$ circuits indépendants (R_j, r_{int}) avec $j=1,2,\dots,n+1$.

4.2.2 Mise en équation

La déformation et la courbure de la poutre numéro i avec ($i=1,2,\dots,n$) sont donnés par l'expression suivante :

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{2}v_i'^2 + yv_i'' \quad (4.1)$$

$$\kappa = v_i''$$

L'énergie cinétique de la poutre numéro i et de la masse en mouvement s'écrit comme suit :

$$E_{ci} = \frac{1}{2}\rho_s S_s \int_0^L \dot{v}_i^2 dx + \frac{M}{2L_c} \int_L^{L+L_c} (\dot{v}_i + L_c \dot{v}_i')^2 dx \quad (4.2)$$

L'effort normal sur une demi-poutre de longueur L s'écrit :

$$N = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} b \sigma_{11}^s dy \right) dx = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} b E_s \epsilon_{11} dy \right) dx = \frac{E_s S_s}{2L} \left(\int_0^L v_i'^2 dx \right) \quad (4.3)$$

L'expression du moment de flexion M_i sur une demi-poutre de longueur L s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} b \sigma_{11}^s y dy = \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} b E_s \epsilon_{11} y dy = \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} b E_s \left(\frac{1}{2}v_i'^2 + yv_i'' \right) y dy \\ &= \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} b E_s v_i'' y^2 dy = E_s I_s \kappa \end{aligned} \quad (4.4)$$

Avec $I_s = \frac{bh_s^3}{12}$.

Par conséquent, l'énergie élastique peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} E_{pi} &= \frac{1}{2} \int_0^L (N \epsilon_{11} + M \kappa) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} E_s S_s \left(\int_0^L v_i'^2 dx \right) \right) \left(\frac{1}{2} v_i'^2 + y v_i'' \right) + (2E_p I_p + E_s I_s) \kappa^2 \right) dx \\ &= \frac{E_s S_s}{8L} \left(\int_0^L v_i'^2 dx \right)^2 + \frac{E_s I_s}{2} \left(\int_0^L v_i'' dx \right)^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

On suppose que les poutres ont les mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques. Le travail dû à la force d'amortissement électromagnétique s'écrit :

$$W_i^d = c_{ei} \frac{v_i}{L_c} (\dot{v}_i - \dot{v}_{i-1}) + c_{e(i+1)} \frac{v_i}{L_c} (\dot{v}_i - \dot{v}_{i+1}) \quad (4.6)$$

Le travail dû aux interactions magnétiques est donné par :

$$W_i^m = \frac{v_i F_i^m (v_{i-1}, v_i, v_{i+1})}{L_c} \quad (4.7)$$

Les forces exactes de restauration magnétique s'écrivent :

$$F_i^m = \frac{\mu_0 Q_i}{4\pi} \left(\frac{Q_{i-1}}{(d_{i-1} + v_{i-1} - v_i)^2} - \frac{Q_{i+1}}{(d_i + v_i - v_{i+1})^2} \right) - M_i g \quad (4.8)$$

Après le développement limité à l'ordre 3 [3] de l'équation (4.8), la force de restauration magnétique s'écrit :

$$F_i^m = \left(\frac{\mu_0 Q_i}{4\pi} \left(\begin{aligned} & \left(\frac{Q_{i-1}}{d_{i-1}^2} - \frac{Q_{i+1}}{d_i^2} \right) + 2 \left(\frac{Q_{i-1}}{d_{i-1}^3} (v_i - v_{i-1}) + \frac{Q_{i+1}}{d_i^3} (v_i - v_{i+1}) \right) \\ & - 3 \left(\frac{Q_{i-1}}{d_{i-1}^4} (v_i - v_{i-1})^2 - \frac{Q_{i+1}}{d_i^4} (v_i - v_{i+1})^2 \right) \\ & + 4 \left(\frac{Q_{i-1}}{d_{i-1}^5} (v_i - v_{i-1})^3 + \frac{Q_{i+1}}{d_i^5} (v_i - v_{i+1})^3 \right) \end{aligned} \right) - M_i g \right) \quad (4.9)$$

A l'équilibre statique $F_i^m = 0$ et pour avoir $v_i = 0$ comme position d'équilibre, on a :

$$Q_i = \frac{4\pi d_{i-1}^2 d_i^2 M_i g}{\mu_0 (Q_{i-1} d_i^2 - Q_{i+1} d_{i-1}^2)} \quad (4.10)$$

La substitution de l'équation (4.10) dans l'équation (4.9), conduit à la nouvelle expression de la force de restauration magnétique :

$$F_i^m = \left(\frac{d_{i-1}^2 d_i^2 M_i g}{(Q_{i-1} d_i^2 - Q_{i+1} d_{i-1}^2)} \left(\begin{aligned} & \left(\frac{Q_{i-1}}{d_{i-1}^2} - \frac{Q_{i+1}}{d_i^2} \right) + 2 \left(\frac{Q_{i-1}}{d_{i-1}^3} (v_i - v_{i-1}) + \frac{Q_{i+1}}{d_i^3} (v_i - v_{i+1}) \right) \\ & - 3 \left(\frac{Q_{i-1}}{d_{i-1}^4} (v_i - v_{i-1})^2 - \frac{Q_{i+1}}{d_i^4} (v_i - v_{i+1})^2 \right) \\ & + 4 \left(\frac{Q_{i-1}}{d_{i-1}^5} (v_i - v_{i-1})^3 + \frac{Q_{i+1}}{d_i^5} (v_i - v_{i+1})^3 \right) \end{aligned} \right) - M_i g \right) \quad (4.11)$$

Pour des poutres identiques, $Q_{i-1} = Q_i = Q_{i+1} = Q$, on impose la condition suivante :

$$d_i = d_0 d_n \sqrt{\frac{nQ}{id_0^2 Q_{n+1} + (n-i)d_n^2 Q_0}}; \forall i < n \quad (4.12)$$

Ce qui permet d'écrire la masse $M = M_{i-1} = M_i = M_{i+1}$ comme suit :

$$M = \frac{\mu_0 Q}{4n\pi g} \left(\frac{Q_0 d_n^2 - Q_{n+1} d_0^2}{d_0^2 d_n^2} \right) \quad (4.13)$$

L'équation (4.13), est une équation du second degré en d_0 . La résolution de cette équation donne :

$$d_0 = d_n \sqrt{\frac{\mu_0 Q Q_0}{4n d_n^2 g M \pi + \mu_0 Q Q_{n+1}}} \quad (4.14)$$

La force de restauration magnétique s'écrit :

$$F_i^m = \begin{pmatrix} k_{i(i-1)}(v_i - v_{i-1}) + k_{i(i+1)}(v_i - v_{i+1}) \\ -\alpha_{i(i-1)}(v_i - v_{i-1})^2 - \alpha_{i(i+1)}(v_i - v_{i+1})^2 \\ +\lambda_{i(i-1)}(v_i - v_{i-1})^3 + \lambda_{i(i+1)}(v_i - v_{i+1})^3 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Avec :

$$\begin{aligned} k_{i(i-1)} &= k_{(i-1)i} = \frac{\mu_0 Q^2}{2\pi d_{i-1}^3} \\ \alpha_{i(i-1)} &= \alpha_{(i-1)i} = \frac{3\mu_0 Q^2}{4\pi d_{i-1}^4} \\ \lambda_{i(i-1)} &= \lambda_{(i-1)i} = \frac{\mu_0 Q^2}{\pi d_{i-1}^5} \end{aligned} \quad (4.16)$$

L'énergie totale des forces extérieures peut être exprimée comme suit :

$$W_i^{ext} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int_L^{L+L_c} c \dot{v}_i v_i dx + \int_0^L \rho_s S_s L \ddot{Y} v_i dx + M L_c \ddot{Y} v_i \\ + c_{ei} \frac{v_i}{L_c} (\dot{v}_i - \dot{v}_{i-1}) + c_{e(i+1)} \frac{v_i}{L_c} (\dot{v}_i - \dot{v}_{i+1}) + \frac{v_i F_i^m(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})}{L_c} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

La fonction Heaviside de la partie élastique de la poutre s'écrit :

$$H_1(x) = \begin{cases} 1 \rightarrow Si : x \in [0, L] \\ 0 \rightarrow Si : x \in [L, L + L_c] \end{cases} \quad (4.18)$$

La fonction Heaviside de la partie rigide de l'aimant s'écrit :

$$H_2(x) = \begin{cases} 0 \rightarrow Si : x \in [0, L] \\ 1 \rightarrow Si : x \in [L, L + L_c] \end{cases} \quad (4.19)$$

La fonctionnelle Hamiltonienne I est donnée par $I = \sum_{i=1}^n I_i$, avec :

$$I_i = \int_{t_0}^{t_f} (E_{ci} - E_{pi} + W_i^{ext}) dt \quad (4.20)$$

Pour $\delta I = \sum_{i=1}^n \delta I_i = 0$, on a :

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(- \int_0^{L+L_c} \begin{pmatrix} \rho_s S_s \ddot{v}_i H_1 + E_s I_s H_1 v_i^{IV} \\ + c H_1 \dot{v}_i - \frac{E_s S_s}{2L} v_i'' H_1(x) \int_0^L v_i'^2 dx \\ + c_{ei} \frac{H_2}{L_c} (\dot{v}_i - \dot{v}_{i-1}) + c_{e(i+1)} \frac{H_2}{L_c} (\dot{v}_i - \dot{v}_{i+1}) \\ + \frac{H_2}{L_c} F_i^m(v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) + \left(\rho_s S_s H_1 + H_2 \frac{M}{L_c} \right) \ddot{Y} \end{pmatrix} \delta v_i dx \right) dt = 0 \quad (4.21)$$

$$- \left[\left(\frac{E_s S_s}{2L} v_i' \int_0^L v_i'^2 dx - E I v_i''' \right) \delta v_i + E_s I_s v_i'' \delta v' \right]_0^L - M \ddot{v}_i(L) \delta v_i(L)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} v_i(0, t) &= v_i'(0, t) = 0 \\ v_i'(L, t) &= 0 \\ M_i \ddot{v}_i(L, t) + E_s I_s v_i'''(L, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ainsi, les équations du mouvement s'écrivent comme suit :

$$\left(\begin{aligned} &\rho_s S_s \ddot{v}_i H_1 + E_s I_s H_1 v_i^{IV} + c H_1 \dot{v}_i + c_{ei} H_2 (\dot{v}_i - \dot{v}_{i-1}) + c_{e(i+1)} H_2 (\dot{v}_i - \dot{v}_{i+1}) \\ &+ \frac{H_2}{L_c} \begin{pmatrix} k_{i(i+1)} (v_i - v_{i+1}) + k_{i(i-1)} (v_i - v_{i-1}) - \alpha_{i(i+1)} (v_i - v_{i+1})^2 \\ - \alpha_{i(i-1)} (v_i - v_{i-1})^2 + \lambda_{i(i+1)} (v_i - v_{i+1})^3 + \lambda_{i(i-1)} (v_i - v_{i-1})^3 \end{pmatrix} \\ &- \frac{E_s S_s}{2L} v_i'' H_1 \int_0^L v_i'^2 dx + \left(\rho_s S_s H_1 + H_2 \frac{M}{L_c} \right) \ddot{Y} \end{aligned} \right) = 0 \quad (4.23)$$

4.2.3 Projection modale

Pour la résolution du système couplé (4.23), on projette les déplacements sur une base constituée d'un seul mode :

$$v_i(x, t) = \phi(x)a_i(t) \quad (4.24)$$

Où $\phi(x)$ est la base de projection et $a_i(t)$ sont les coordonnées généralisés.

Nous posons $m = \rho S$ et nous pré-multiplions par ϕ et on intègre les équations du mouvement entre 0 et $L + Lc$. Nous obtenons alors :

$$\left(\begin{aligned} & m \int_0^L \Phi^2 dx \ddot{a}_i + E_s I_s \int_0^L \Phi \Phi^{IV} dx a_i + c_{ei} \Phi^2 (\dot{a}_i - \dot{a}_{i-1}) + c_{e(i+1)} \Phi^2 (\dot{a}_i - \dot{a}_{i+1}) \\ & + \Phi \left(\begin{aligned} & k_{i(i+1)}(a_i - a_{i+1}) + k_{i(i-1)}(a_i - a_{i-1}) - \alpha_{i(i+1)}(a_i - a_{i+1})^2 \\ & - \alpha_{i(i-1)}(a_i - a_{i-1})^2 + \lambda_{i(i+1)}(a_i - a_{i+1})^3 + \lambda_{i(i-1)}(a_i - a_{i-1})^3 \end{aligned} \right) \\ & - \frac{E_s S_s}{2L} \int_0^L \Phi'^2 dx \int_0^L \Phi \Phi'' dx a_i^3 + c \int_0^L \Phi^2 dx \dot{a}_i + \left(mL \int_0^L \Phi dx + \Phi M \right) \ddot{Y} \end{aligned} \right) = 0 \quad (4.25)$$

Après intégration par partie et d'après les conditions aux limites, on obtient :

$$a_i \int_0^L \Phi^{(4)} \Phi dx = \frac{M}{E_s I_s} \ddot{a}_i \Phi^2 + a_i \int_0^L \Phi''^2 dx \text{ et } \int_0^L \Phi'' \Phi dx = - \int_0^L \Phi'^2 dx.$$

L'équation (4.25) devient :

$$\left(\begin{aligned} & M_{eq} \ddot{a}_i + c_{eq} \dot{a}_i + c_{e(i+1)} \phi^2(L) (\dot{a}_i - \dot{a}_{i+1}) + c_{ei} \phi^2(L) (\dot{a}_i - \dot{a}_{i-1}) \\ & + k_{eq}^L a_i + k_{i(i+1)} \phi^2(L) (a_i - a_{i+1}) + k_{i(i-1)} \phi^2(L) (a_i - a_{i-1}) \\ & - \alpha_{i(i+1)} \phi^3(L) (a_i - a_{i+1})^2 - \alpha_{i(i-1)} \phi^3(L) (a_i - a_{i-1})^2 + k_{eq}^{NL} a_i^3 \\ & + \lambda_{i(i+1)} \phi^4(L) (a_i - a_{i+1})^3 + \lambda_{i(i-1)} \phi^4(L) (a_i - a_{i-1})^3 \end{aligned} \right) = -F_{eq} \ddot{Y} \quad (4.26)$$

Avec :

$$\begin{aligned} k_{eq} &= E_s I_s \int_0^L \Phi''^2 dx \\ k_{eq}^{NL} &= \frac{E_s S_s}{2L} \left(\int_0^L \Phi'^2 dx \right)^2 \\ F_{eq} &= mL \int_0^L \Phi dx + \Phi M \\ M_{eq} &= m \int_0^L \Phi^2 dx + M \Phi^2 \\ c_{eq} &= c \int_0^L \Phi^2 dx \end{aligned} \quad (4.27)$$

Le choix du $\Phi(x)$ sous la forme d'une fonction admissible s'écrit :

$$\phi(x) = b_0 + b_1 \frac{x}{L} + b_2 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + b_3 \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (4.28)$$

Cette fonction satisfait les conditions limites géométriques :

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \Phi'(0) = 0 \\ \Phi'(L) &= 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Ce qui donne :

$$\phi(x) = 3 \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L}\right)^3; \phi(L) = 1 \quad (4.30)$$

Les équations du mouvement s'écrivent en coordonnées généralisées a_1 et a_2 sous la forme d'un système non-linéaire équivalent à n ddl :

$$\begin{pmatrix} M_{eq}\ddot{a}_i + c_{eq}\dot{a}_i + c_{e(i+1)}(\dot{a}_i - \dot{a}_{i+1}) + c_{ei}(\dot{a}_i - \dot{a}_{i-1}) \\ + k_{eq}^L a_i + k_{i(i+1)}(a_i - a_{i+1}) + k_{i(i-1)}(a_i - a_{i-1}) \\ - \alpha_{i(i+1)}(a_i - a_{i+1})^2 - \alpha_{i(i-1)}(a_i - a_{i-1})^2 + k_{eq}^{NL} a_i^3 \\ + \lambda_{i(i+1)}(a_i - a_{i+1})^3 + \lambda_{i(i-1)}(a_i - a_{i-1})^3 \end{pmatrix} = -F_{eq}\ddot{Y} \quad (4.31)$$

Les paramètres raideurs et masse équivalente sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} k_{eq} &= \frac{12E_s I_s}{L^3} \quad ; \quad M_{eq} = \frac{13Lm}{35} + M \\ k_{eq}^{NL} &= \frac{18E_s S_s}{25L^3} \quad ; \quad c_{eq} = \frac{13Lc}{35} = 2\xi \sqrt{\frac{k_{eq}}{M_{eq}}} \\ F_{eq} &= \frac{Lm}{2} + M \end{aligned} \quad (4.32)$$

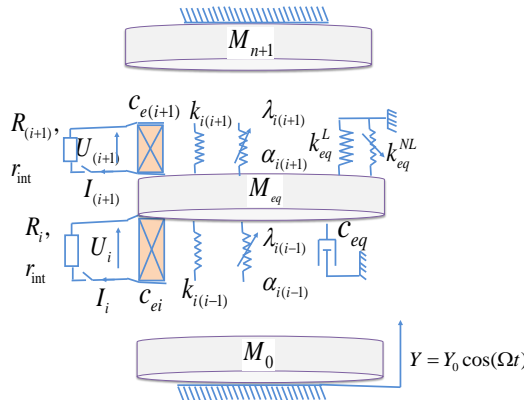


FIGURE 4.3 – Modèle équivalent d'un réseau des poutres en grands déplacements

Le modèle équivalent à nddl (Figure 4.3) comprend une rigidité linéaire, une rigidité non-linéaire et un amortissement (mécanique et magnétique).

La matrice de raideur linéaire s'écrit comme suit :

$$K = \begin{pmatrix} k_{eq}^L + k_{12} + k_{10} & -k_{12} & & 0 \\ -k_{21} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -k_{(n-1)n} \\ 0 & & -k_{n(n-1)} & k_{eq}^L + k_{n(n+1)} + k_{n(n-1)} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

La matrice d'amortissement s'écrit comme suit :

$$C = \begin{pmatrix} c_{eq} + c_{e1} + c_{e2} & -c_{e2} & & 0 \\ -c_{e2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -c_{en} \\ 0 & & -c_{en} & c_{eq} + c_{en} + c_{e(n+1)} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

La matrice de masse s'écrit comme suit :

$$M = M_{eq} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = M_{eq} I_n \quad (4.35)$$

La fonction non linéaire est donnée comme suit :

$$f_{NL}(a) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_{12}(a_1 - a_2)^2 - \alpha_{10}a_1^2 + k_{eq}^{NL}a_1^3 \\ +\lambda_{12}(a_1 - a_2)^3 + \lambda_{10}a_1^3 \end{pmatrix} \\ \dots \\ \begin{pmatrix} -\alpha_{i(i+1)}(a_i - a_{i+1})^2 - \alpha_{i(i-1)}(a_i - a_{i-1})^2 + k_{eq}^{NL}a_i^3 \\ +\lambda_{i(i+1)}(a_i - a_{i+1})^3 + \lambda_{i(i-1)}(a_i - a_{i-1})^3 \end{pmatrix} \\ \dots \\ \begin{pmatrix} -\alpha_{n(n+1)}a_n^2 - \alpha_{n(n-1)}(a_n - a_{n-1})^2 + k_{eq}^{NL}a_n^3 \\ +\lambda_{n(n+1)}a_n^3 + \lambda_{n(n-1)}(a_n - a_{n-1})^3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Avec : $a = [a_1 \dots a_i \dots a_n]^T$ et $e = [1 \dots 1 \dots 1]^T$

Ainsi, le système (4.31) s'écrit comme suit :

$$M\ddot{a} + C\dot{a} + Ka + f_{NL}(a) = -F_{eq}\ddot{Y}e \quad (4.37)$$

4.3 Résultats et discussion

4.3.1 Cas d'une seule poutre en interaction magnétique

L'équation du mouvement non linéaire (4.31) pour la cas d'une poutre s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} M_{eq}\ddot{a}_1 + (c_{eq} + c_{e1} + c_{e2})\dot{a}_1 + (k_{eq}^L + k_{10} + k_{12})a_1 \\ -(\alpha_{12} + \alpha_{10})a_1^2 + (k_{eq}^{NL} + \lambda_{10} + \lambda_{12})a_1^3 \end{pmatrix} = -F_{eq}\ddot{Y} \quad (4.38)$$

Avec :

$$\begin{aligned} k_{10} &= \frac{\mu_0 Q_0 Q}{2\pi d_0^3} & \alpha_{10} &= \frac{3\mu_0 Q_0 Q}{4\pi d_0^4} & \lambda_{10} &= \frac{\mu_0 Q_0 Q}{\pi d_0^5} \\ k_{12} &= \frac{\mu_0 Q^2}{2\pi d_1^3} & \alpha_{12} &= \frac{3\mu_0 Q^2}{4\pi d_1^4} & \lambda_{12} &= \frac{\mu_0 Q^2}{\pi d_1^5} \end{aligned} \quad (4.39)$$

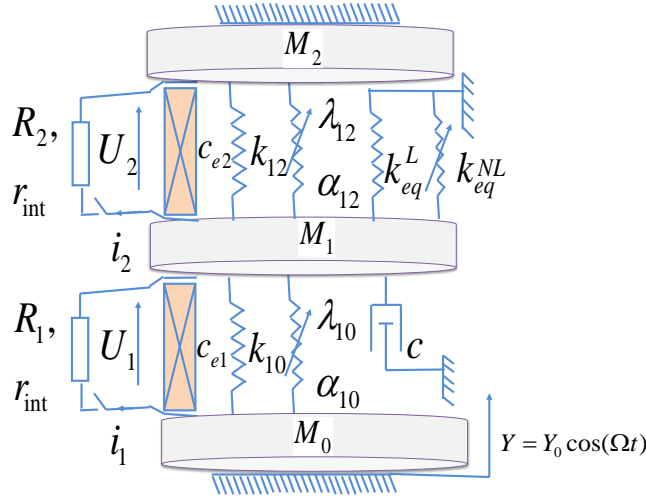


FIGURE 4.4 – Système à 1ddl

A l'équilibre statique, $F_1^m = 0$, et pour avoir la position d'équilibre $a_1 = 0$, on a la condition suivante :

$$Q_1 = \frac{4\pi d_0^2 d_1^2 M_1 g}{(Q_0 d_1^2 - Q_2 d_0^2) \mu_0} \quad (4.40)$$

Si on considère que les aimants sont identiques ($Q = Q_0 = Q_1 = Q_2$), la condition suivante (4.41) est primordiale :

$$M_1 = Q^2 \frac{(d_1^2 - d_0^2) \mu_0}{4\pi d_0^2 d_1^2 g} \quad (4.41)$$

La résolution de l'équation du second ordre (4.41) en d_0 , conduit à l'expression suivante :

$$d_0 = \frac{d_1 \sqrt{\mu_0 Q}}{\sqrt{4d_1^2 g M_1 \pi + \mu_0 Q^2}} \quad (4.42)$$

La pulsation de résonance linéaire du récupérateur magnétique à 1ddl s'écrit comme suit :

$$\omega_r = \sqrt{\frac{2M_1 g (d_1^3 + d_0^3)}{d_0 d_1 (d_1^2 - d_0^2) \left(\frac{13Lm}{35} + M_1\right)} + \frac{12EI}{\left(\frac{13Lm}{35} + M_1\right) L^3}} \quad (4.43)$$

Par conséquent, l'équation du mouvement de la poutre en grand déplacement peut être écrite comme suit :

$$\begin{pmatrix} \ddot{a}_1 + 2\xi\omega_r \dot{a}_1 + \omega_r^2 a_1 - \frac{3g(d_1^2 + d_0^2)}{d_0^2 d_1^2} a_1^2 \\ + \left(\frac{2(d_0^5 + d_1^5)}{(d_0^3 + d_1^3)d_0^2 d_1^2} \omega_r^2 + \left(\frac{18}{25h^2} - \frac{2(d_0^5 + d_1^5)}{(d_0^3 + d_1^3)d_0^2 d_1^2} \right) \frac{k_{eq}^L}{M} \right) a_1^3 \end{pmatrix} = \kappa \cos(\Omega t) \quad (4.44)$$

Avec : $\omega_r = 2\pi f_r$, $\xi = \frac{c+c_{e1}+c_{e2}}{2M\omega_r}$ et $\kappa = \frac{F_{eq}}{M} Y_0 \Omega^2$.

Cette équation (4.44) est une équation non linéaire sous une excitation harmonique. Pour la résolution, nous utilisons la technique de perturbation (Chapitre 2). Afin de simplifier l'approche de perturbation [144], nous introduisons la transformation standard ci-dessous :

$$a_1 = A(t) \cos[\Omega t + \beta(t)] \quad (4.45)$$

Lorsque l'excitation du récupérateur magnétique proposé est proche de la résonance, nous introduisons le paramètre de réglage σ par la relation suivante :

$$\Omega = \omega_r + \varepsilon \sigma \quad (4.46)$$

Avec ε est le paramètre de perturbation. En éliminant les termes séculaire à l'ordre 1, on obtient les équations de modulation de l'amplitude et de la phase comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{1}{2\omega_r} [\kappa \sin \beta - 2\xi \omega_r^2 A] \\ \dot{\beta} &= -\sigma + \frac{1}{2A\omega_r} \left[\left(\frac{3\omega_r^2}{2} \frac{(d_0^5 + d_1^5)}{(d_0^3 + d_1^3)d_0^2 d_1^2} + \left(\frac{27}{50h^2} - \frac{3}{2} \frac{(d_0^5 + d_1^5)}{(d_0^3 + d_1^3)d_0^2 d_1^2} \right) \frac{k_{eq}^L}{M} \right) A^3 + \kappa \cos \beta \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

La solution périodique qui nous intéresse correspondant au point fixe ($\dot{A} = 0$ et $\dot{\beta} = 0$). La réponse en fréquence de cette solution peut s'écrire sous la forme paramétrique suivante :

$$A = \frac{\kappa}{2\xi\omega_r^2} \sin\beta$$

$$\sigma = \frac{3\kappa^2(d_0^5 + d_1^5)}{16\xi^2\omega_r^3(d_0^3 + d_1^3)d_0^2d_1^2} \left(1 + \left(\frac{9(d_0^3 + d_1^3)d_0^2d_1^2}{25h^2(d_0^5 + d_1^5)} - 1\right) \frac{k_{eq}^L}{k_{eq}^L + k_{eqm}^L}\right) \sin^2\beta + \xi\omega_r \cot\beta \quad (4.48)$$

L'amplitude critique A_{cm} est définie comme l'amplitude d'oscillation limite au-delà de laquelle, il y a bistabilité [105, 145]. A_{cm} est l'amplitude de transition entre le comportement linéaire et non-linéaire. Mathématiquement, A_{cm} est définie comme l'amplitude d'oscillation pour laquelle l'équation $\frac{d\sigma}{d\beta} = 0$, et a une solution unique $\beta_c = \frac{\pi}{3}$. Par conséquent, la force critique s'écrit :

$$\kappa_{cm} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt[4]{3} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{9}{25h^2} \frac{(d_0^3 + d_1^3)d_0^2d_1^2}{(d_0^5 + d_1^5)} - 1\right) \frac{k_{eq}^L}{k_{eq}^L + k_{eqm}^L}\right)}} \frac{\sqrt{(d_0^3 + d_1^3)d_0d_1}}{\sqrt{(d_0^5 + d_1^5)}} \xi^{3/2} \omega_r^2 \quad (4.49)$$

Ainsi, on obtient l'expression de l'amplitude critique suivante :

$$A_{cm} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt[4]{3} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{9}{25h^2} \frac{(d_0^3 + d_1^3)d_0^2d_1^2}{(d_0^5 + d_1^5)} - 1\right) \frac{k_{eq}^L}{k_{eq}^L + k_{eqm}^L}\right)}} \frac{\sqrt{d_0^3 + d_1^3}d_0d_1}{\sqrt{d_0^5 + d_1^5}} \sqrt{\xi} \quad (4.50)$$

La Figure 4.5 illustre la variation de l'amplitude de la réponse fréquentielle par rapport à l'amplitude d'excitation pour les paramètres de conception donnés dans le tableau 4.1. Ces paramètres ont été choisis pour obtenir la fréquence de résonance ($f_r = 74Hz$). Au-delà de l'amplitude critique, la définition de la bande passante est déterminée par rapport au point de bifurcation le plus élevé. En particulier, la bande passante augmente considérablement lorsque le récupérateur est entraîné en régime non-linéaire.

4.3.2 Cas de deux poutres en interaction magnétique

La Figure 4.6 illustre le récupérateur électromagnétique d'énergie à 2ddl. Il est composé de deux poutres bi-encastées et couplées magnétiquement par deux aimants mobiles M_1 et M_2 . Chaque aimant mobile est fixé au milieu de chaque poutre. L'ensemble est placé entre deux autres aimants fixes M_0 et M_3 . Les pôles magnétiques sont orientés de telle sorte que les forces de répulsion soient créées entre deux aimants adjacents. Ces forces magnétiques induisent dans le système une rigidité magnétique non-linéaire.

L'équation de mouvement (4.31) nous permet d'écrire l'équation suivante :

TABLE 4.1 – Propriétés physiques et géométriques du récupérateur électromagnétique d'énergie

Paramètre	Valeur
L (mm)	60
L_c (mm)	5
b (mm)	4
h_s (mm)	0.6
M (g)	60
d_1 (mm)	8
d_2 (mm)	5
H_s (k A/m)	720
S_0 (cm ²)	3.14
S_1 (cm ²)	0.8
S_2 (cm ²)	1.1
ξ	0.01
c_{e1} (Ns/m)	1.4
c_{e2} (Ns/m)	1.4

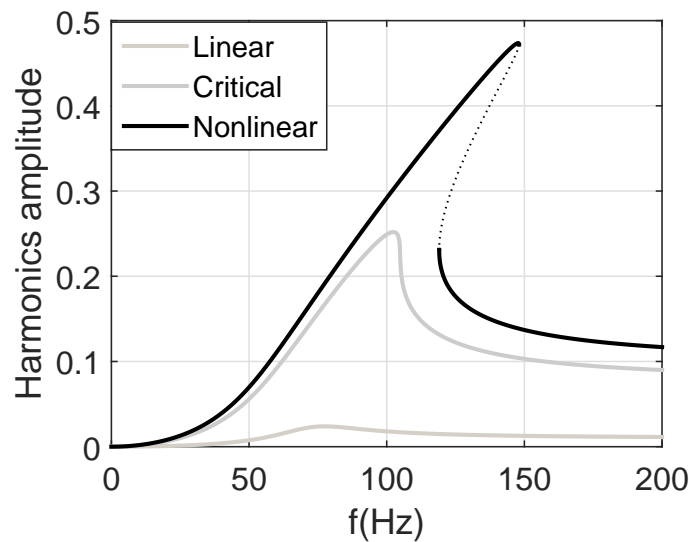


FIGURE 4.5 – Réponses fréquentielles forcées du récupérateur électromagnétique à 1ddl. Les paramètres de conception sont indiqués au tableau 4.1 pour les trois configurations : linéaire ($Y_0 = 0,045\text{mm}$), critique ($Y_0 = 0,0585\text{mm}$) et non-linéaire ($Y_0 = 0,07\text{mm}$). Les lignes continues indiquent les solutions périodiques stables et les lignes pointillées indiquent les solutions périodiques instables.

$$M\ddot{a} + C\dot{a} + Ka + f_{NL}(a) = -F_{eq}\ddot{Y}_e \quad (4.51)$$

Avec :

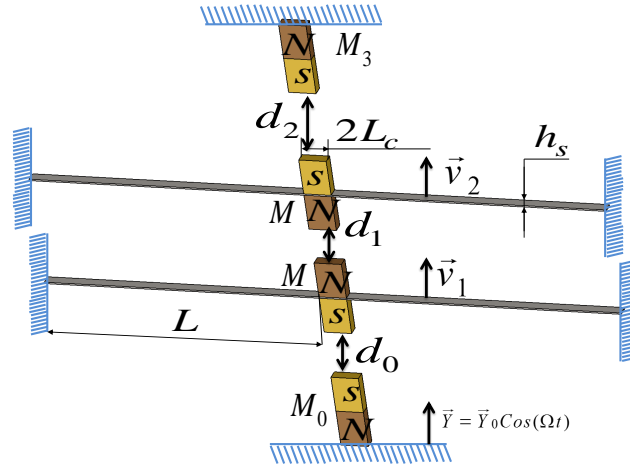


FIGURE 4.6 – Récupérateur à 2ddl avec couplage magnétique soumis à une excitation harmonique à la base.

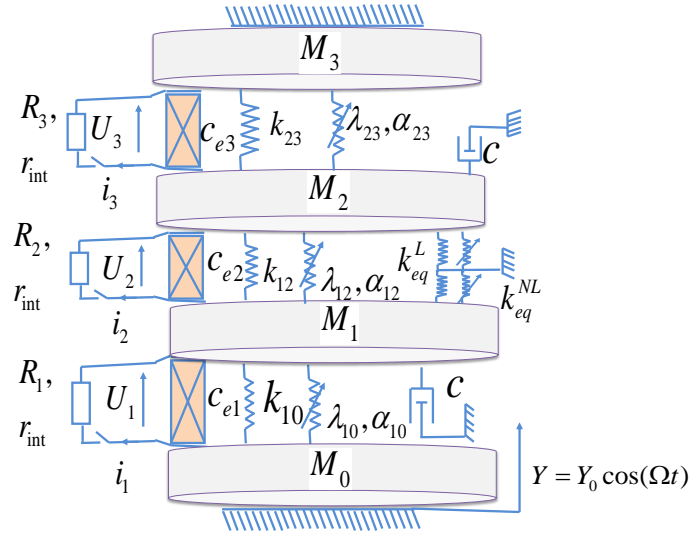


FIGURE 4.7 – Modèle électromécanique équivalent du récupérateur à 2ddl.

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}^T \quad (4.52)$$

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$M = M_{eq} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{eq} I_2 \quad (4.53)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{eq} + c_{e1} + c_{e2} & -c_{e2} \\ -c_{e2} & c_{eq} + c_{e2} + c_{e3} \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{eq}^L + k_{12} + k_{10} & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{eq}^L + k_{23} + k_{21} \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

$$f_{NL}(a) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_{12}(a_1 - a_2)^2 - \alpha_{10}a_1^2 + k_{eq}^{NL}a_1^3 \\ +\lambda_{12}(a_1 - a_2)^3 + \lambda_{10}a_1^3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\alpha_{23}a_2^2 - \alpha_{21}(a_2 - a_1)^2 + k_{eq}^{NL}a_2^3 \\ +\lambda_{23}a_2^3 + \lambda_{21}(a_2 - a_1)^3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

Ou :

$$\begin{aligned} k_{10} &= \frac{\mu_0 Q_0 Q}{2\pi d_0^5} & \alpha_{10} &= \frac{3\mu_0 Q_0 Q}{4\pi d_0^4} & \lambda_{10} &= \frac{\mu_0 Q_0 Q}{\pi d_0^5} \\ k_{12} = k_{21} &= \frac{\mu_0 Q^2}{2\pi d_1^3} & \alpha_{12} = \alpha_{21} &= \frac{3\mu_0 Q^2}{4\pi d_1^4} & \lambda_{12} = \lambda_{21} &= \frac{\mu_0 Q^2}{\pi d_1^5} \\ k_{23} &= \frac{\mu_0 Q_3 Q}{2\pi d_2^3} & \alpha_{23} &= \frac{3\mu_0 Q_3 Q}{4\pi d_2^4} & \lambda_{23} &= \frac{\mu_0 Q_3 Q}{\pi d_2^5} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Pour que $M_1 = M_2 = M$ et $Q_1 = Q_2 = Q$ (Poutre identique), les conditions suivantes sont imposées :

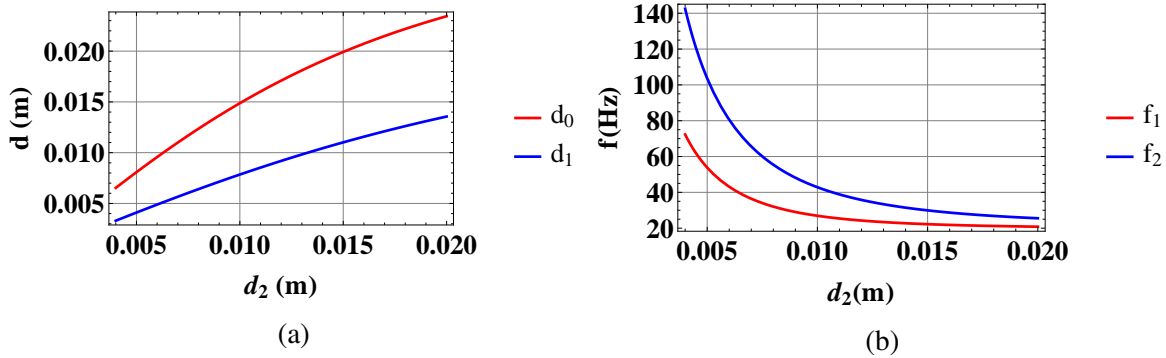
$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{d_2 \sqrt{\mu_0} \sqrt{Q} \sqrt{Q_0}}{\sqrt{8d_2^2 g M \pi + \mu_0 Q Q_3}} \\ d_1 &= \sqrt{\frac{2d_0^2 d_2^2 Q}{Q_0 d_2^2 + Q_3 d_0^2}} \\ M &= \frac{\mu_0 Q}{8\pi g} \left(\frac{Q_0 d_2^2 - Q_3 d_0^2}{d_0^2 d_2^2} \right) \end{aligned} \quad (4.58)$$

On suppose que les aimants et les poutres mobiles sont identiques, la relation entre les distances de séparation (gap) peuvent être déterminées par la relation de l'équation (4.58). La Figure 4.8a montre la variation des écarts d_0 et d_1 par rapport à d_2 pour un ensemble spécifique de paramètres de conception listés dans le tableau 4.2. La Figure 4.8b montre la variation des fréquences naturelles f_1 et f_2 par rapport à l'écart d_2 . La distance du gap peut être ajustée pour régler la fréquence et l'intensité du couplage non-linéaire. En effet, l'augmentation de la distance d_2 conduit à un faible couplage non-linéaire et les deux fréquences f_1 et f_2 deviennent très proches.

Les figures 4.9 et 4.10 illustrent la variation de la puissance récoltée et de la puissance normalisée en fonction de la fréquence pour une amplitude d'excitation ($Y_0 = 0.4mm$) et pour différentes valeurs du gap d_2 . En particulier, le couplage magnétique induit une non-linéarité

TABLE 4.2 – Propriétés géométriques et physiques du récupérateur à 2ddl

Paramètre	Valeur
L (mm)	60
L_c (mm)	5
b (mm)	4
h_s (mm)	0.6
M (g)	60
d_2 (mm)	4
H_s (k A/m)	720
S_0 (cm ²)	3.14
S (cm ²)	0.8
S_3 (cm ²)	1.1
ξ	0.01
c_{e1} (Ns/m)	1.4
c_{e2} (Ns/m)	1.4
c_{e3} (Ns/m)	1.4


 FIGURE 4.8 – (a) Variation de la distance du gap d_0 (ligne rouge) et d_1 (ligne bleue) en fonction de d_2 . (b) Variation des fréquences propres f_1 (ligne rouge) et f_2 (ligne bleue) en fonction de d_2 .

conduisant à une amélioration de la bande passante. Les forces à distance magnétiques du système à 2ddl peuvent être modifiées par la distance du gap d_2 dont le but de régler les conditions de couplage afin de contrôler les deux fréquences naturelles. Par conséquent, les interactions modales augmentent et mènent à de fortes amplitudes de vibration. Ainsi, les performances du récupérateur magnétique à 2ddl peuvent être considérablement améliorées jusqu'à 100% en terme de bande passante et $60\mu W cm^{-3} g^{-3}$ en terme de puissance normalisée.

Pour ce récupérateur à 2ddl, l'ajout du couplage linéaire et non-linéaire des deux poutres en oscillation suite aux interactions magnétiques permet d'augmenter les performances.

En optimisation, nous avons définie deux fonctions objectifs g_1 et g_2 . La première fonction objectif g_1 consiste à diminuer la première fréquence de résonance f_1 et augmenter la différence fréquentielle. La deuxième fonction objective g_2 consiste à augmenter le premier pic de

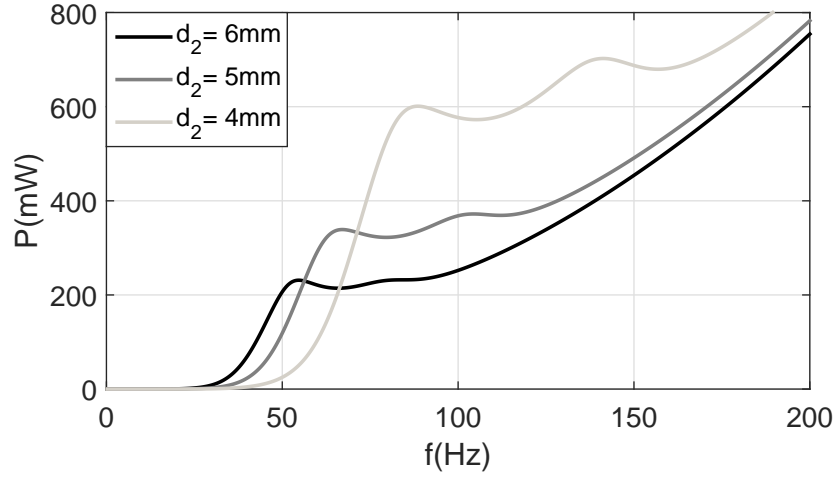


FIGURE 4.9 – Variation de la puissance récupérée en fonction de la fréquence pour différentes valeurs du gap d_2

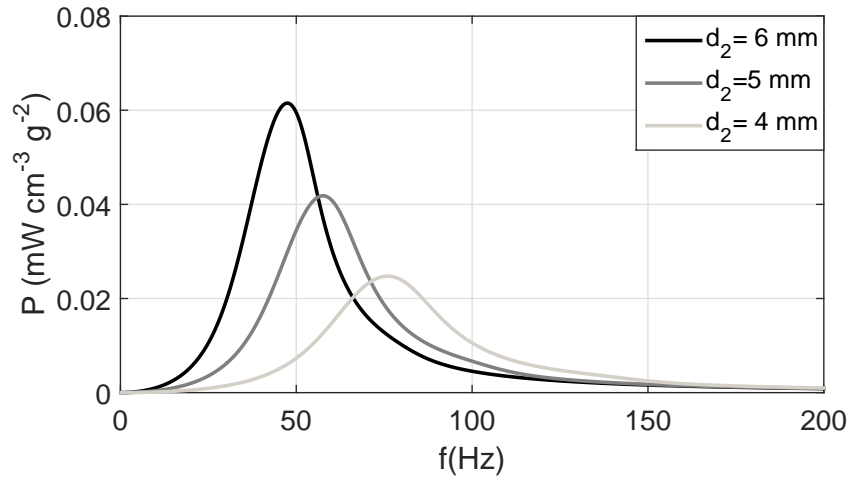


FIGURE 4.10 – Variation de la puissance normalisée en fonction de la fréquence pour différentes valeurs du gap d_2

la puissance normalisée et rapprocher l'amplitude des deux pics de puissance récupérée.

$$g_1 = \frac{f_1}{f_2 - f_1}$$

$$g_2 = \frac{|P_1 - P_2|}{P_{n1}}$$
(4.59)

Avec P_1 et P_{n1} représentent respectivement la puissance récupérée et la puissance normalisée correspondant à la première fréquence de résonance linéaire f_1 . P_2 est la puissance récupérée correspondant à la deuxième fréquence de résonance f_2 .

Les deux fonctions objectifs g_1 et g_2 dépendent de plusieurs paramètres. Dans un premier temps, nous avons commencé par l'analyse de la sensibilité à priori (SA) pour déterminer les paramètres influents comme variable et fixer les paramètres non influents. La méthode de Morris est utilisée pour distinguer entre ces paramètres de conception. Dans ce contexte, les paramètres les plus influents sont (l_b) est la longueur totale de la bobine, (R_1, R_2, R_3) sont respectivement les résistances de charge à partir des bobines, (d_2) est la distance du gap entre l'aimant et la poutre supérieure, (r_0, r_3) sont respectivement les rayons des aimants fixes supérieurs et inférieurs, (L_c) est le rayon de l'aimant mobile, (M) est la masse de l'aimant mobile, (h_s) est l'épaisseur et (L) est la demi-longueur de la poutre.

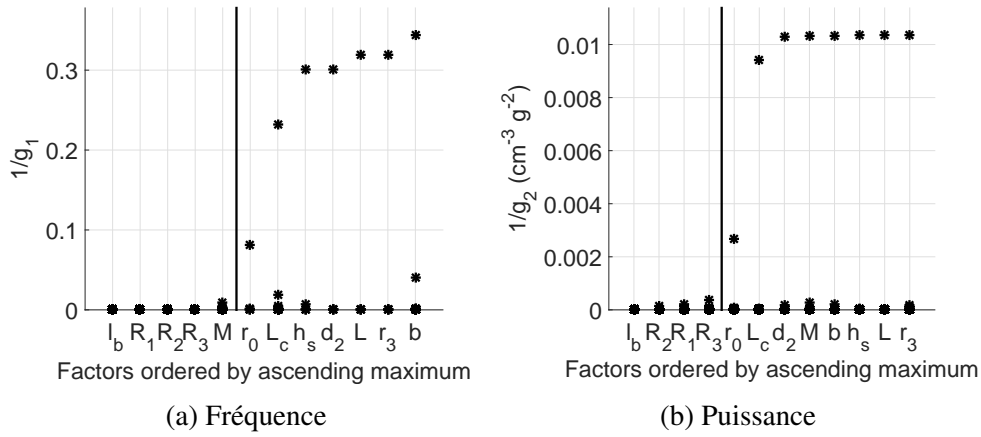


FIGURE 4.11 – Application de la méthode de Morris adaptée

La Figure 4.11a représente la sensibilité de la première fonction objectif g_1 . Les paramètres non influents pour cette première fonction objectif sont la longueur de la bobine (l_b), les résistances de récupération d'énergie (R_1, R_2, R_3) et la masse de l'aimant (M). La Figure 4.11b représente la sensibilité de la deuxième fonction objectif g_2 . Les paramètres non influents pour cette deuxième fonction objectif sont la longueur de la bobine et les résistances de récupération d'énergie. Par conséquent, les paramètres de conception non influents sont l_b, R_1, R_2, R_3 .

Pour améliorer les performances de ce récupérateur d'énergie à 2 ddl, nous avons utilisé la procédure d'optimisation (NSGA-II). Les deux fonctions objectifs g_1 et g_2 sont simultanément minimisées avec l'utilisation des huit paramètres de conception ($r_0, L_c, d_2, M, b, h_s, L$ et r_3)

$$\begin{aligned} & \text{Min} [g_1(x), g_2(x)], \\ & x = [r_0 \quad L_c \quad d_2 \quad M \quad b \quad h_s \quad L \quad r_3]^T \end{aligned} \quad (4.60)$$

Les solutions Pareto-optimale est obtenues après 200 générations. Le front Pareto optimal est convexe (Figure 4.11). Trois solutions sont retenus sur la Figure 4.11. La première solution favorise la fonction objectif g_1 par rapport à g_2 . La deuxième solution permet au concepteur de donner à peu près 50% à chaque fonction objectif. Tandis que la troisième solution favorise la fonction objectif g_2 par rapport à g_1 . Le Tableau 4.3 résume les trois solutions précédemment citées.

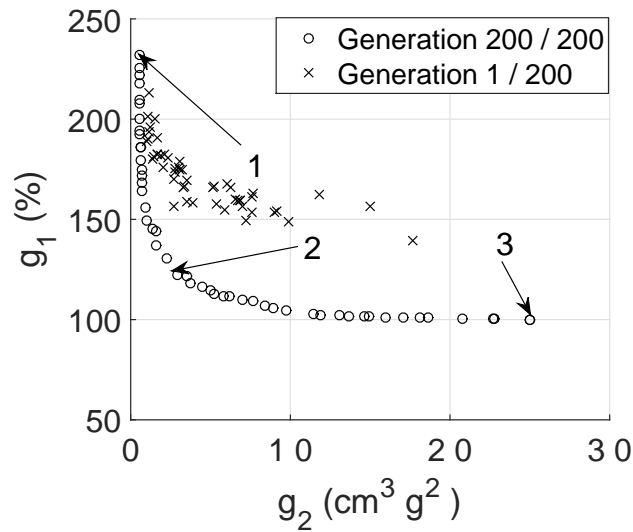


FIGURE 4.12 – Solutions préférées du problème d'optimisation multi-objectif.

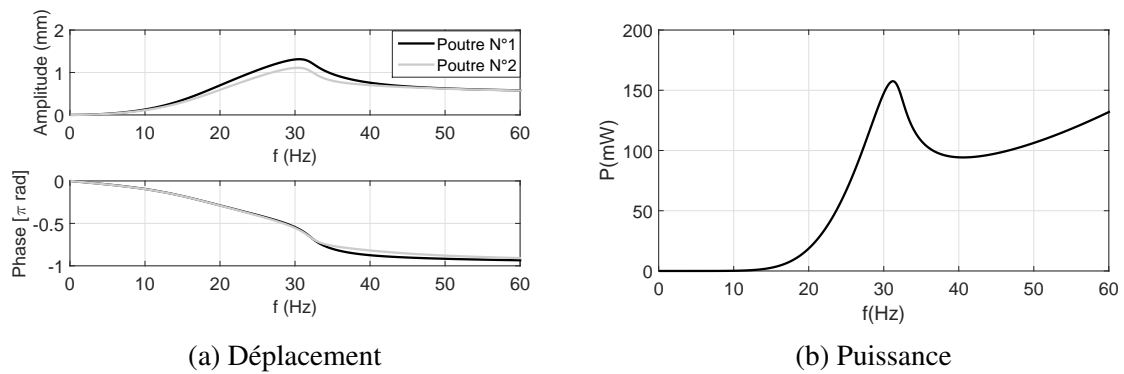


FIGURE 4.13 – Réponses fréquentielles forcées correspondant à la première solution optimale pour le cas d'un récupérateur d'énergie électromagnétique à 2ddl

Les réponses fréquentielles en terme de puissance normalisée, de phase et d'amplitude qui correspondent à la première solution sont illustrées par la Figure 4.13. On constate que ces courbes en amplitude et en phase sont en bonne concordance.

La Figure 4.14 illustre les réponses en terme de puissances normalisées des trois solutions précédemment citées. On constate la présence d'un décalage spectral. Le Tableau 4.4 récapitule les différentes valeurs de fréquences, de puissances récupérées et la bande passante pour chaque solution. Ainsi, on remarque que les valeurs de la puissance normalisée varient de façon inverse lorsqu'on se déplace sur le front de Pareto.

4.3.3 Cas de trois poutres en interaction magnétique

D'après l'équation de mouvement générale (4.31) et pour $n=3$, le problème s'écrit comme suit :

TABLE 4.3 – Paramètres de conception pour les trois solutions sélectionnées dans la Figure 4.11

	Solution 1	Solution 2	Solution 3	Borne de variation []
$g_1(\%)$	232	122.5	100	
$g_2(cm^3g^2)$	1	5.8	50	
$M(g)$	60	60	60	4 – 60
$r_0(mm)$	8	8	8	4 – 8
$r_3(mm)$	4	5.9	8	4 – 8
$L_c(mm)$	7.75	5	5	4 – 8
$b(mm)$	4	4	4	4 – 8
$h_s(mm)$	0.6	0.6	0.6	0.6 – 2
$L(mm)$	80	100	100	40 – 100
$d_2(mm)$	10	10	8.6	4 – 10
$Y_0(mm)$	0.5	0.5	0.5	
$c_{ei}(Ns/m)$	1.4	1.4	1.4	

TABLE 4.4 – Performance du récupérateur à 2ddl pour les trois solutions sélectionnées dans le front Paréto

	Solution 1	Solution 2	Solution 3
$f_1(Hz)$	44	22.5	26
$f_2(Hz)$	72	35	41
$BW(\%)$	100	114	93
$P_n(\mu W cm^{-3}g^{-2})$	313	110	48

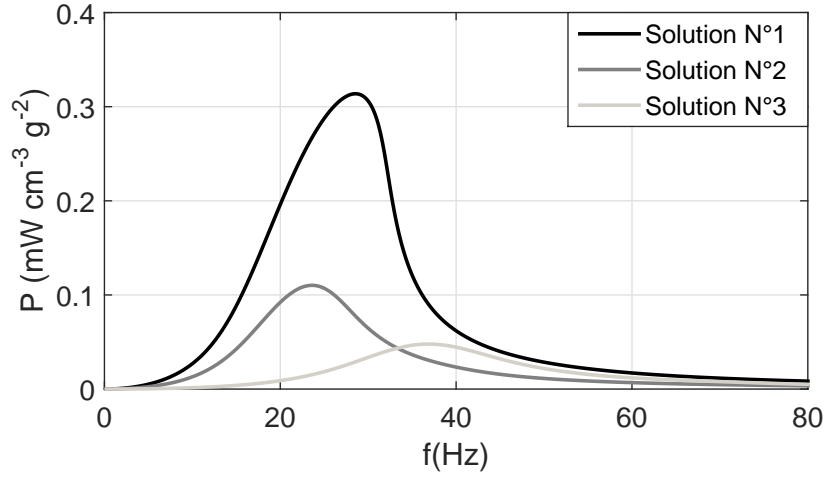


FIGURE 4.14 – Réponses fréquentielles forcée de la puissance normalisée des trois solutions optimales issues du front de Paréto pour le cas du récupérateur d'énergie vibratoire à 2ddl

$$M\ddot{a} + C\dot{a} + Ka + f_{NL}(a) = -F_{eq}\ddot{Y}e \quad (4.61)$$

Avec :

$$\begin{aligned} a &= [a_1 \ a_2 \ a_3]^T \\ e &= [1 \ 1 \ 1]^T \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$M = M_{eq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{eq}I_3 \quad (4.63)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{eq} + c_{e1} + c_{e2} & -c_{e2} & 0 \\ -c_{e2} & c_{eq} + c_{e2} + c_{e3} & -c_{e3} \\ 0 & -c_{e3} & c_{eq} + c_{e3} + c_{e4} \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{eq}^L + k_{12} + k_{10} & -k_{12} & 0 \\ -k_{21} & k_{eq}^L + k_{23} + k_{21} & -k_{23} \\ 0 & -k_{32} & k_{eq}^L + k_{34} + k_{32} \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

$$f_{NL}(a) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_{12}(a_1 - a_2)^2 - \alpha_{10}a_1^2 + k_{eq}^{NL}a_1^3 \\ +\lambda_{12}(a_1 - a_2)^3 + \lambda_{10}a_1^3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\alpha_{23}(a_2 - a_3)^2 - \alpha_{21}(a_2 - a_1)^2 + k_{eq}^{NL}a_2^3 \\ +\lambda_{23}(a_2 - a_3)^3 + \lambda_{21}(a_2 - a_1)^3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\alpha_{34}a_3^2 - \alpha_{32}(a_3 - a_2)^2 + k_{eq}^{NL}a_3^3 \\ +\lambda_{34}a_3^3 + \lambda_{32}(a_3 - a_2)^3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

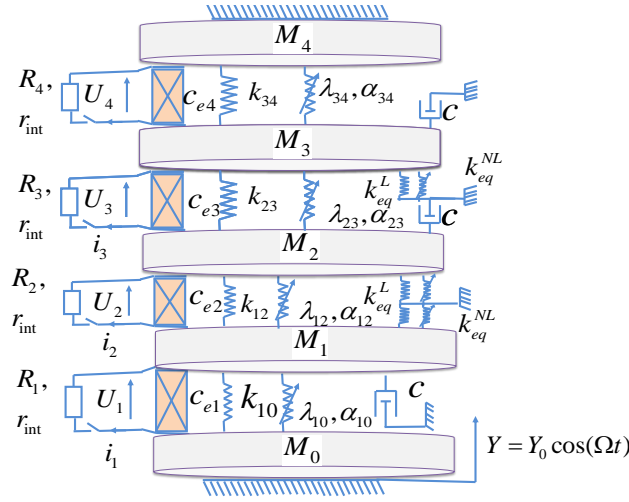


FIGURE 4.15 – Modèle équivalent 3ddl non-linéaire sous excitation à la base

Où :

$$\begin{aligned} k_{10} &= \frac{\mu_0 Q_0 Q}{2\pi d_0^3} & \alpha_{10} &= \frac{3\mu_0 Q_0 Q}{4\pi d_0^4} & \lambda_{10} &= \frac{\mu_0 Q_0 Q}{\pi d_0^5} \\ k_{12} = k_{21} &= \frac{\mu_0 Q^2}{2\pi d_1^3} & \alpha_{12} = \alpha_{21} &= \frac{3\mu_0 Q^2}{4\pi d_1^4} & \lambda_{12} = \lambda_{21} &= \frac{\mu_0 Q^2}{\pi d_1^5} \\ k_{23} = k_{32} &= \frac{\mu_0 Q^2}{2\pi d_2^3} & \alpha_{23} = \alpha_{32} &= \frac{3\mu_0 Q^2}{4\pi d_2^4} & \lambda_{23} = \lambda_{32} &= \frac{\mu_0 Q^2}{\pi d_2^5} \\ k_{34} &= \frac{\mu_0 Q_3 Q}{2\pi d_3^3} & \alpha_{34} &= \frac{3\mu_0 Q_3 Q}{4\pi d_3^4} & \lambda_{34} &= \frac{\mu_0 Q_3 Q}{\pi d_3^5} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Pour avoir $M_1 = M_2 = M_3 = M$ et $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$ (Poutre identique), les conditions suivantes sont imposées comme suit :

$$d_0 = d_3 \sqrt{\frac{\mu_0 Q Q_0}{12 d_3^2 g M \pi + \mu_0 Q Q_4}} \quad (4.68)$$

$$d_1 = d_0 d_3 \sqrt{\frac{3Q}{2 d_3^2 Q_0 + Q_4 d_0^2}} \quad (4.69)$$

$$d_2 = d_0 d_3 \sqrt{\frac{3Q}{2 d_0^2 Q_4 + d_3^2 Q_0}} \quad (4.70)$$

$$M = \frac{\mu_0 Q}{12 \pi g} \left(\frac{Q_0 d_3^2 - Q_4 d_0^2}{d_0^2 d_3^2} \right) \quad (4.71)$$

Pour que ce couplage linéaire et non linéaire permet d'améliorer à la fois la bande passante, les fréquences de récupération d'énergie et la puissance récupérable, nous définissons deux fonctions objectifs g_1 et g_2 . La première fonction objectif g_1 consiste à augmenter la différence fréquentielle et le pic de la première fréquence de résonance f_1 . La deuxième fonction objectif g_2 consiste à rapprocher les amplitudes des pics de la puissance récupérée avec l'augmentation du premier pic de la puissance normalisée.

$$g_1 = \frac{f_1}{f_3 - f_1} \quad (4.72)$$

$$g_2 = \frac{|P_1 - P_3| |P_1 - P_2|}{P_3 P_{n1}}$$

Avec P_1 et P_{n1} sont respectivement la puissance récupérée et la puissance normalisée correspondant à la première fréquence de résonance linéaire f_1 , P_2 est la puissance récupérée pour la deuxième fréquence de résonance f_2 et P_3 est la puissance récupérée pour la troisième fréquence de résonance f_3 .

Les deux fonctions objectifs g_1 et g_2 dépendent de plusieurs paramètres. Dans un premier temps, nous commençons par l'analyse de sensibilité pour sélectionner les paramètres de conception influents retenus comme des variables et les paramètres non influents considérées comme déterministe. Ces paramètres de conceptions sont la longueur totale de la bobine (l_b), les résistances de récupération d'énergie à partir des bobines (R_1, R_2, R_3, R_4), la distance du gap entre l'aimant et la poutre supérieur (d_3), les rayons des aimants fixes supérieures et inférieures (r_0, r_4), le rayon de l'aimant mobile (L_c), la masse de l'aimant mobile (M), l'épaisseur de la poutre (h_s) et la demi longueur de la poutre (L).

La Figure 4.16a représente la sensibilité a priori de la première fonction objectif g_1 . Les paramètres non influents pour cette fonction sont (l_b, R_1, R_2, R_3 et R_4). La Figure 4.16b représente la sensibilité de la deuxième fonction objectif g_2 . Les paramètres non influents pour cette

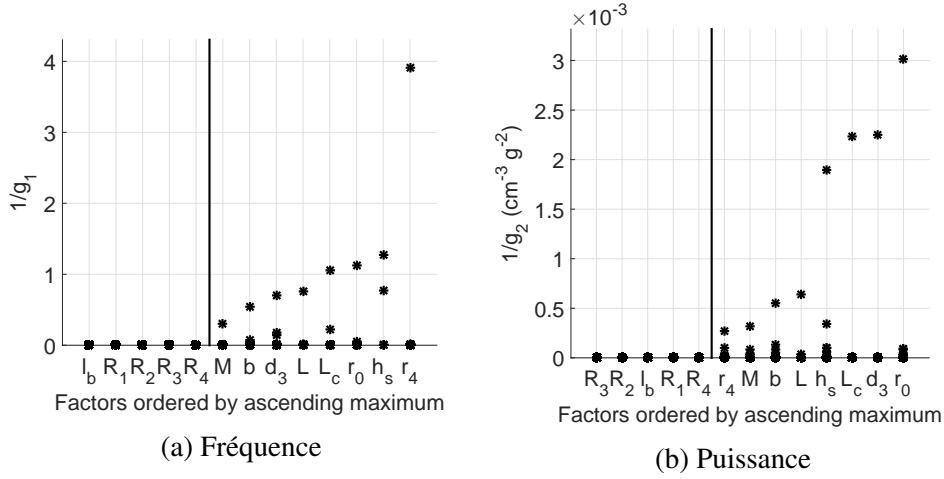


FIGURE 4.16 – Application de la méthode de Morris adaptée

fonction sont l_b, R_1, R_2, R_3 et R_4 . Par conséquent, on constate que les paramètres non influents sont les amortissements électromagnétiques de récupération d'énergie pour les deux fonctions objectifs précédemment cités.

Pour améliorer les performances de ce récupérateur d'énergie à 3ddl, nous utilisons la même stratégie d'optimisation multiobjectifs (NSGA-II). Cette stratégie permet d'augmenter la bande passante et d'améliorer la puissance normalisée récupérée. Les deux fonctions objectifs g_1 et g_2 sont optimisées dans le champ des paramètres de conception : $(r_0, L_c, d_3, M, b, h_s, L$ et $r_3)$.

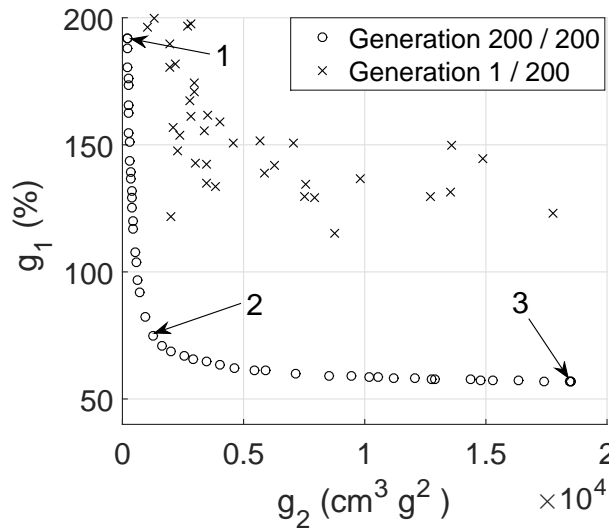


FIGURE 4.17 – Solutions préférées du problème d'optimisation multi-objectif

Le front Pareto-optimal est obtenu après 200 générations (Figure 4.17). Ce front de Pareto optimal est convexe. Le concepteur trouve une grande souplesse pour choisir une solution de ce front. Par exemple, la première solution favorise la première fonction objectif g_1 , la troisième solution favorise la deuxième fonction g_2 tandis que la deuxième solution ne favorise pas

une fonction objectif précise mais autorise un compromis entre les deux fonctions objectifs. le tableau 4.5 récapitule les solutions chiffrés des trois solutions précédemment citées.

TABLE 4.5 – Paramètres de conception pour les trois solutions sélectionnées dans la Figure 4.17

	Solution 1	Solution 2	Solution 3	Borne de variation []
$g_1(\%)$	192	75	57	
$g_2(cm^3g^2)$	209	1253	18490	
$M(g)$	60	60	60	4 – 60
$r_0(mm)$	8	8	8	4 – 8
$r_4(mm)$	4	8	8	4 – 8
$L_c(mm)$	8	5	5	4 – 8
$b(mm)$	4	4	4	4 – 8
$h_s(mm)$	0.6	0.6	0.6	0.6 – 2
$L(mm)$	80	80	80	40 – 100
$d_3(mm)$	15	13.6	7	4 – 15
$R_i(Ohm)$	10	10	10	
$l_b(m)$	17.5	17.5	17.5	

Les réponses fréquentielles forcées en amplitude, en phase et en puissance normalisée sont illustrées par la Figure 4.18. Ces réponses fréquentielles correspondent à la première solution issue du front de Pareto et pour une excitation à la base ($Y_0 = 1.3mm$). Nous constatons que les trois poutres vibrent en phase aux fréquences de résonance $f_1 = 15$ Hz, $f_2 = 20$ Hz et $f_3 = 23$ Hz. La bande passante de cette première solution est environ 17 %.

La Figure 4.19 illustre les réponses fréquentielles en amplitude, en phase et en puissance normalisée qui correspondent aux paramètres de conception de la troisième solution issue du front de Pareto et pour une excitation $Y_0 = 1.1$ mm. Nous constatons que les poutres vibrent en phase avec les fréquences de résonance suivantes ($f_1 = 37$ Hz, $f_2 = 73$ Hz et $f_3 = 103$ Hz). La bande passante de cette troisième solution est environ 87 %.

La Figure 4.20 illustre les réponses fréquentielles en terme de puissance normalisée pour les trois solutions du front de Pareto. Le Tableau 4.6, illustre les performances en terme de

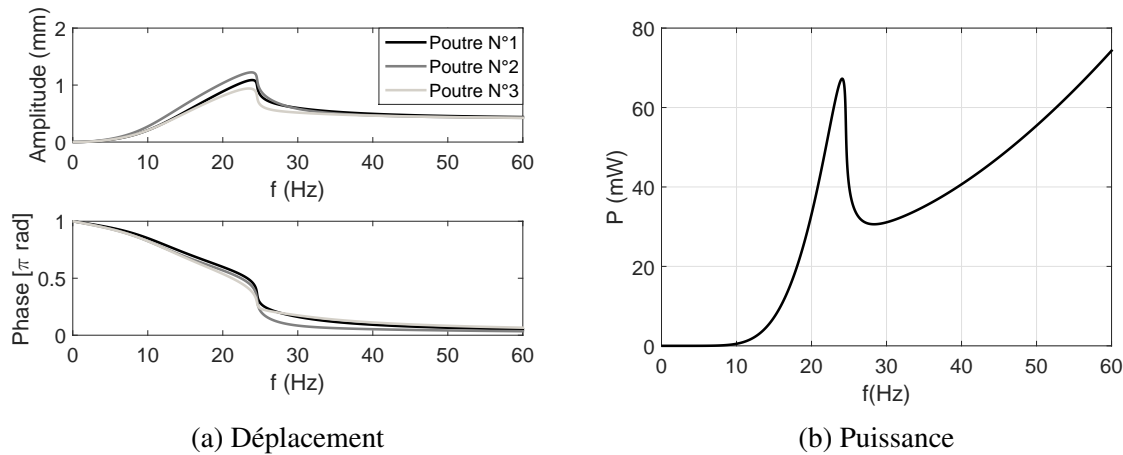


FIGURE 4.18 – Réponses fréquentielles forcées en amplitude, en phase et puissance récupérée de la première solution optimale pour le cas d'un récupérateur d'énergie vibratoire à 3ddl ($Y=1.3$ mm)

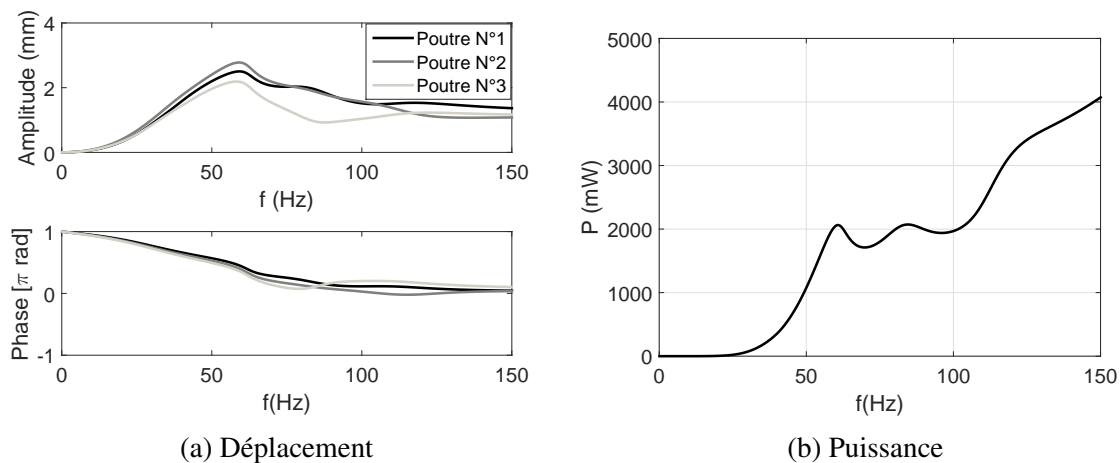


FIGURE 4.19 – Réponses fréquentielles forcées en amplitude, en phase et puissance récupérée de la troisième solution optimale pour le cas d'un récupérateur d'énergie vibratoire à 3ddl ($Y=1.1$ mm)

fréquences propres, de puissances normalisées et en terme de bande passante. Ces différentes solutions permettent au concepteur de choisir un bon compromis entre la bande passante et la puissance normalisée.

4.3.4 Étude comparative entre les récupérateurs à 2ddl et à 3ddl

La Figure 4.21 illustre les réponses fréquentielles des deux récupérateurs (à 2ddl et à 3ddl) en terme de puissance normalisée. Nous constatons que la puissance normalisée s'améliore lorsque le nombre de degré de liberté du récupérateur augmente.

Le tableau 4.7 montre une comparaison entre les performances du récupérateur à 2ddl et à 3ddl. La bande passante est supérieure pour le cas d'un récupérateur à 2ddl tandis que la

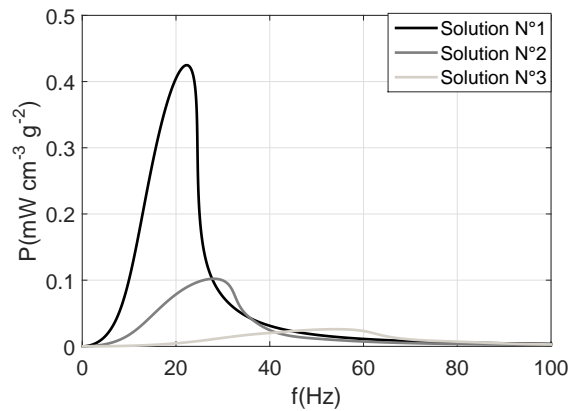


FIGURE 4.20 – Réponses fréquentielles forcées en terme de puissance normalisée des trois solutions optimales pour le cas d'un récupérateur d'énergie vibratoire à 3ddl

TABLE 4.6 – Performances d'un récupérateur à 3ddl pour les trois solutions sélectionnées dans le front (Figure 4.20)

	Solution 1	Solution 2	Solution 3
$f_1(Hz)$	15.3	19	37
$f_2(Hz)$	20	33	73
$f_3(Hz)$	23	45	103
$P_n(\mu W cm^{-3} g^{-2})$	426	100	27
$BW(\%)$	17	86.7	87

puissance normalisée est supérieure pour le cas d'un récupérateur à 3ddl. Malgré que la bande passante du récupérateur à 3ddl est inférieure à la bande passante du récupérateur à 2ddl, la puissance normalisée est améliorée de 400 % par rapport au récupérateur à 2ddl.

Le tableau 4.8 présente des résultats comparatifs entre les récupérateurs proposés et les récupérateurs issus de la bibliographie. Nous constatons que les performances en terme de puissance normalisée du récupérateur proposé à 3ddl sont nettement meilleurs par rapports aux récupérateurs issus de la bibliographie.

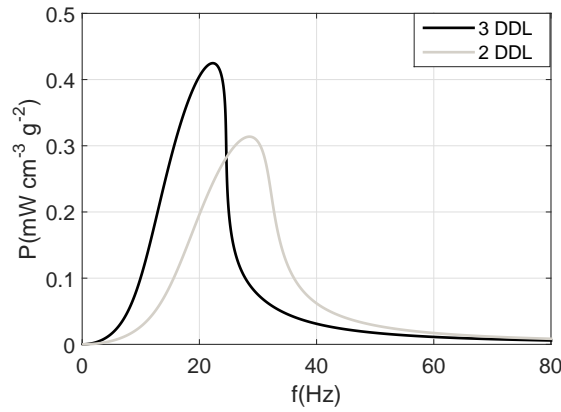


FIGURE 4.21 – Comparaison de la puissance normalisée entre un récupérateur à 2ddl et un récupérateur à 3ddl

TABLE 4.7 – Comparaison entre les performances du récupérateur à 2ddl et du récupérateur à 3ddl

Paramètre	Fréquence (Hz)	$P_n(\mu W cm^{-3} g^{-2})$	BW (%)
2ddl	44-72	313	100
3ddl	15-23	426	17

Donc, il est intéressant d'utiliser un réseau des poutres en interaction magnétique pour que la récupération d'énergie soit maximale.

TABLE 4.8 – Comparaison entre les performances des récupérateurs proposés (à 2ddl et à 3ddl) et les récupérateurs de la littérature

	Fréquence (Hz)	Accélérations (g)	$P_n(\mu W cm^{-3} g^{-2})$
Yu et al. [150]	234.5	5	51.9
Roundy et Wright [151]	120	2.5	60
Renault et al. [152]	320	0.18	103
Elfrink et al. [153]	572	19.6	3
Berdy et al. [154]	50	2	0.006
2ddl (Présent travail)	44-72	0.08	313
3ddl (Présent travail)	15-23	0.07	426

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, l'étude a été focalisée sur l'amélioration de la récupération d'énergie vibratoire en se basant sur la dynamique multi-modale et la non-linéarité des poutres couplées magnétiquement. Cette amélioration exige la présence de l'effet des non-linéarités géométriques et les interactions magnétiques et en tenant compte de l'amplitude et de la fréquence d'excitation extérieure.

Pour ce faire, le principe d'Hamilton étendu a été utilisé pour construire le modèle multiphysique continu sous forme d'un système d'équations non-linéaires aux dérivées partielles, qui a été ensuite discrétisé en utilisant la procédure de Galerkin. La méthode de la balance harmonique et la méthode de continuation asymptotique numérique ont été utilisées pour résoudre le modèle discret et le modèle continu. Pour mettre en évidence les performances des récupérateurs proposés, plusieurs simulations numériques ont été réalisées. Une étude de sensibilité à priori suivie d'une optimisation multiobjectif (NSGA II) nous a conduit à des résultats probants pour le récupérateur électromagnétique.

Conclusions et perspectives

Conclusions :

Dans cette thèse, on a proposé une stratégie de dimensionnement et de conception afin de maximiser l'énergie vibratoire récupérée par un récupérateur composé d'un ensemble d'aimants couplés en lévitation magnétique. Le travail de thèse est composé de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, on a présenté une étude bibliographique sur la récupération d'énergie de vibration à partir de suspensions des véhicules, des structures de génie civil, des voies de chemin de fer, des vagues d'océan, et à partir des mouvements humains. De même, on a présenté les caractéristiques des transducteurs piézo-électriques, des transducteurs électromagnétiques et les circuits électroniques de puissance. Dans cette étude, on a récapitulé les techniques récentes de récupération d'énergie large bande. Telle que, les techniques de réglage manuel ou automatique de la fréquence de résonance, la technique de configuration multimodale non linéaire avec la possibilité de combiner ces techniques pour améliorer les performances de la récupération d'énergie vibratoire.

Dans le deuxième chapitre, on a commencé par la présentation des différentes méthodologies de résolution des équations différentielles non linéaires. Ensuite, on a appliqué ces méthodes sur des systèmes dynamiques à 1 ddl et 2 ddl. Enfin, on a présenté les algorithmes de sensibilité les plus connus et les algorithmes d'optimisation multi-objectifs tel que NSGA et NSGA II.

Dans le troisième chapitre, on a proposé une stratégie de récupération d'énergie vibratoire basée sur un réseau d'aimants couplé et en lévitation magnétique. Dans ce chapitre on a présenté un modèle composée de n aimants mobiles. Les équations du mouvement ont été obtenues en tenant compte de la non-linéarité magnétique et de l'amortissement électromagnétique. Ces équations ont été résolues en utilisant la technique HBM couplée avec la technique MAN en tenant compte de la variation de l'amplitude d'excitation en fonction de la fréquence. L'avantage de l'approche de récupération d'énergie est l'interaction multimodale et la réduction du frottement entre les aimants libres (M_i) et le cylindre de support. Ce nouveau récupérateur d'énergie prend d'avantage des non-linéarités et des interactions multimodale pour éloigner la bande passante et augmenter la puissance normalisée récupérée comparé au récupérateur classique composé d'un seul aimant en lévitation. Ensuite, une procédure d'optimisation multi-objectifs a été développée afin de maximiser les performances de ce récupérateur. Pour réduire le temps de calcul lié au nombre élevé des paramètres de conception, on a commencé par la méthode de sensibilité qui permet d'éliminer les paramètres non influents. Ensuite, on a appliqué la procédure d'optimisation multiobjectifs en utilisant l'algorithme NSGA-II pour les cas des récupérateurs à 2ddl et à 3ddl. Les avantages du couplage non linéaire ont été mises en évidence en compa-

rant les performances issues d'un générateurs composé de deux récupérateurs à 1ddl découplés VEH_1^1 et VEH_2^1 avec un générateur à 2ddl (VEH^2). Le générateur VEH^2 permet la récupération d'énergie de vibration dans la gamme de fréquences 5.1 - 12 Hz pour une largeur de bande de 120% et une puissance récupérée normalisée de $10,4mWcm^{-3}g^{-2}$. De plus, le récupérateur à 3ddl est plus performant que les deux premiers récupérateurs dans la gamme de fréquences 4.6 - 14.5 Hz et pour une bande passante de 190% et une puissance récupérée normalisée de $20.2mWcm^{-3}g^{-2}$, ce qui met en évidence les avantages des interactions modales.

Enfin, dans le quatrième chapitre, on a étendu la modélisation précédente au cas d'un récupérateur composé d'un réseau de n poutres identiques en interaction magnétique. Ce récupérateur permet d'exploiter à la fois la non-linéarité géométrique, la non linéarité magnétique et les interactions multimodales. Pur cela, nous avons utilisé le principe de Hamilton étendu pour constituer les équations du mouvement qui ont été discrétisées en utilisant la procédure de Galerkin et sont résolues en utilisant la méthode HBM couplée avec la méthode MAN. Plusieurs simulations numériques ont été réalisées après une étude de sensibilité et d'optimisation afin d'améliorer les performances du récupérateur. Nous avons constaté que le récupérateur à 3ddl est plus performant que les récupérateurs existants dans la littérature. Leur gamme de fréquences varient entre 15 et 23 Hz pour une puissance récupérée normalisée de $426\mu Wcm^{-3}g^{-2}$, ce qui met en évidence les avantages des interactions modales et des non-linéarités.

Perspectives :

Dans ces travaux de thèse, on a supposé que l'accélération à la base est mono-harmonique. Pour se rapprocher de la réalité de la source d'énergie vibratoire ambiante, on peut envisager d'étendre l'étude par l'application d'une accélération à la base multi-harmonique ou encore aléatoire. De plus, on peut creuser d'avantage dont la récupération d'énergie par l'utilisation des fonctions super ou sub-harmonique.

Comme les structures périodiques présentent des défauts, ce qui donne naissance au phénomène de localisation des modes. On peut exploiter l'intérêt de ce phénomène pour améliorer le générateur de récupération d'énergie vibratoire.

Enfin, la transduction piézoélectrique reste un axe à investir pour améliorer les performances du récupérateur d'énergie.

Annexe A

Cas 1 ddl

L'équation du mouvement non linéaire (4.38) est étudiée pour calculer les positions d'équilibre et évaluer leur stabilité. Par cela, on annule le terme d'amortissement, d'accélération et d'excitation. Ainsi, l'équation de la force d'équilibre de la poutre s'écrit comme suit :

$$(k_{eq}^L + k_{10} + k_{12})v_1 - (\alpha_{10} + \alpha_{12})v_1^2 + (k_{eq}^{NL} + \lambda_{10} + \lambda_{12})v_1^3 = 0 \quad (A.1)$$

L'équation d'équilibre précédente (A.1) admet les solutions suivantes :

$$v_1 = \left\{ 0, \frac{\alpha_{10} + \alpha_{12} \pm \sqrt{(\alpha_{10} + \alpha_{12})^2 - 4(k_{eq}^L + k_{10} + k_{12})(k_{eq}^{NL} + \lambda_{10} + \lambda_{12})}}{2(k_{eq}^{NL} + \lambda_{10} + \lambda_{12})} \right\} \quad (A.2)$$

Puisque la quantité $(\alpha_{10} + \alpha_{12})^2 - 4(k_{eq}^L + k_{10} + k_{12})(k_{eq}^{NL} + \lambda_{10} + \lambda_{12}) < 0$, donc l'équation d'équilibre admet uniquement la solution triviale $v_1 = 0$.

Annexe B

Cas 2 ddl

Les fréquences de résonance du système linéaire à 2-ddl sont de la forme :

$$w_{r1,r2} = \sqrt{\left(\frac{35}{8d_0^4 d_2^4 (d_2^2 Q_0 + d_0^2 Q_3) L^3 (13Lm + 35M) \pi Q_1} \right. \left. \left(2d_0 d_2 Q_1 (d_2^2 Q_0 + d_0^2 Q_3) \left(\frac{d_2^3 L^3 \mu_0 Q_0 Q_1}{+d_0^3 (48d_2^3 EI\pi + L^3 \mu_0 Q_1 Q_3)} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. + L^3 \mu_0 Q_2 \sqrt{\frac{2d_0^2 d_2^2 Q_1}{d_2^2 Q_0 + d_0^2 Q_3}} (d_2^2 Q_0 + d_0^2 Q_3) \pm \right. \right. \\ \left. \left. d_0 d_2 L^3 \sqrt{\left(\frac{2Q_1 \mu_0^2 (d_2^2 Q_0 + d_0^2 Q_3)^2}{d_2^6 Q_0^2 (2Q_1^3 + Q_0 Q_2^2) +} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left(d_0^2 d_2^3 Q_0 (-4d_0 Q_1^3 + 3d_2 Q_0 Q_2^2) Q_3 \right. \right. \right. \\ \left. \left. + d_0^4 (2d_0^2 Q_1^3 + 3d_2^2 Q_0 Q_2^2) Q_3^2 \right. \right. \\ \left. \left. + d_0^6 Q_2^2 Q_3^3 \right) \right) \right) \right) \quad (B.1)$$

Nous cherchons les positions d'équilibre correspondants à $F_1^m = 0$ et $F_2^m = 0$:

$$\{v_1, v_2 \rightarrow 0\} \quad (B.2)$$

$$\left\{ v_1, v_2 \rightarrow \frac{-\alpha_{21} \pm \sqrt{(\alpha_{21})^2 - 4k_{12}\lambda_{21}}}{2\lambda_{21}} \right\} \quad (B.3)$$

$$\left\{ v_1 \rightarrow \frac{\pm \sqrt{(\alpha_{10} + \alpha_{21})^2 - 4(k_{10} + k_{12} + k_{eq}^L)(\lambda_{10} + \lambda_{21} + k_{eq}^{NL})} + \alpha_{10} + \alpha_{21}}{2(\lambda_{10} + \lambda_{21} + k_{eq}^{NL})} \right\} \quad (B.4)$$

$$\left\{ v_2 \rightarrow \frac{\pm \sqrt{(\alpha_{21} + \alpha_{23})^2 - 4(k_{12} + k_{23} + k_{eq}^L)(\lambda_{21} + \lambda_{23} + k_{eq}^{NL})} + \alpha_{21} + \alpha_{23}}{2(\lambda_{21} + \lambda_{23} + k_{eq}^{NL})} \right\} \quad (B.5)$$

Quelque soit les paramètres choisis, nous obtenons toujours des termes négatifs à l'intérieur de la racine. Par conséquent, nous avons une unique position d'équilibre stable $v_1 = 0$ et $v_2 = 0$.

Annexe C

Modèle avec couplage piézoélectrique

Le récupérateur illustré par la figure C.1 est un récupérateur hybride ayant un couplage magnéto-piézo-mécanique. Il est composé de n poutres. Chaque poutre est constituée de deux couches piézoélectriques et une couche d'acier. Ces poutres sont bi-encastées et couplées magnétiquement par n aimants mobiles M_1, M_2, \dots et M_n . Chaque aimant est fixé au milieu de chaque poutre. L'ensemble des poutres est placé entre deux autres aimants fixes M_0 et M_{n+1} en bas et en haut. Les pôles magnétiques sont orientés de telle sorte que les forces répulsives sont créées entre les deux aimants adjacents. Ces forces nous offrent une rigidité magnétique non-linéaire. Une bobine enroulée horizontalement autour de la distance de séparation entre les deux aimants adjacents. Lorsque le récupérateur est soumis à une excitation à la base harmonique $Y(t)$, chaque aimant mobile oscille autour de sa position d'équilibre et un courant est induit dans chaque bobine.

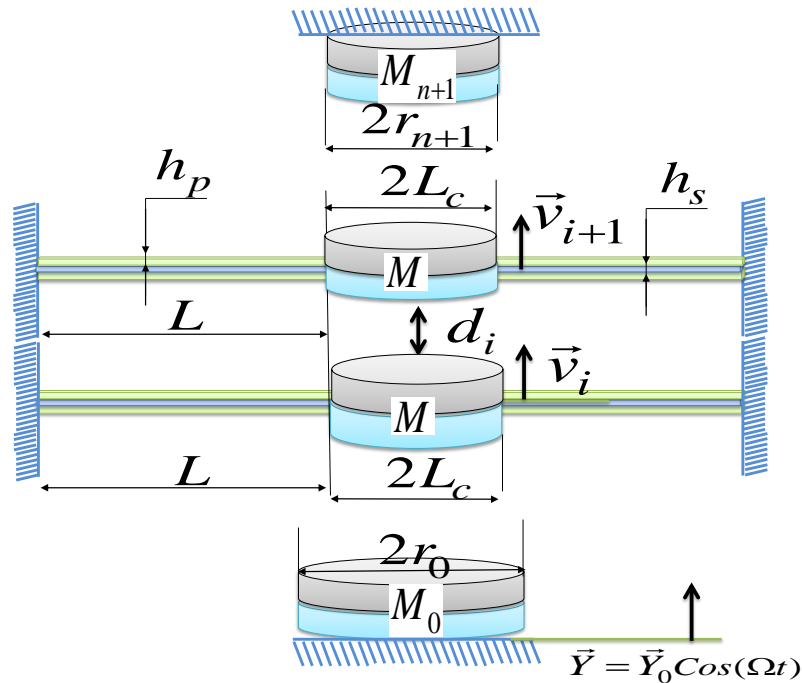


FIGURE C.1 – Récupérateur piézo-électro-magnétique (hybride) sous excitation à la base

L'énergie cinétique de chaque poutre et de chaque masse en mouvement s'écrit comme suit :

$$E_{ci} = \frac{1}{2} (\rho_s S_s + 2\rho_p S_p) \int_0^L \dot{v}_i^2 dx + \frac{M}{2L_c} \int_L^{L+L_c} (\dot{v}_i + L_c \dot{v}_i')^2 dx \quad (C.1)$$

L'effort Normal N_i sur une demi-poutre de longueur L est donné comme suit :

$$N_i = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} b \sigma_{11i}^s dy + \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} b \sigma_{11i}^p dy + \int_{-\frac{h_s}{2}-h_p}^{-\frac{h_s}{2}} b \sigma_{11i}^p dy \right) dx \quad (C.2)$$

$$N_i = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} b E_s \epsilon_{11i} dy + \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} b (E_p \epsilon_{11i} - e_{31} E_{2i}) dy + \int_{-\frac{h_s}{2}-h_p}^{-\frac{h_s}{2}} b (E_p \epsilon_{11i} - e_{31} E_{2i}) dy \right) dx \quad (C.3)$$

$$N_i = \frac{b}{L} \left(\frac{1}{2} h_s E_s \left(\int_0^L v_i'^2 dx \right) + 2h_p \left(\frac{1}{2} E_p \left(\int_0^L v_i'^2 dx \right) - L e_{31} E_{2i} \right) \right) \quad (C.4)$$

$$N_i = \frac{E_s S_s + 2E_p S_p}{2L} \left(\int_0^L v_i'^2 dx \right) - 2e_{31} b V_i \quad (C.5)$$

Le moment de flexion M_i sur une demi-poutre de longueur L est donné comme suit :

$$M_i = \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} b \sigma_{11i}^s y dy + \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} b \sigma_{11i}^p y dy + \int_{-\frac{h_s}{2}-h_p}^{-\frac{h_s}{2}} b \sigma_{11i}^p y dy \quad (C.6)$$

$$M_i = \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} b E_s \epsilon_{11i} y dy + \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} b (E_p \epsilon_{11i} - e_{31} E_{2i}) y dy + \int_{-\frac{h_s}{2}-h_p}^{-\frac{h_s}{2}} b (E_p \epsilon_{11i} - e_{31} E_{2i}) y dy \quad (C.7)$$

$$M_i = \left(\int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} b E_s \left(\frac{1}{2} v_i'^2 + y v_i'' \right) y dy + \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} b \left(E_p \left(\frac{1}{2} v_i'^2 + y v_i'' \right) - e_{31} E_{2i} \right) y dy + \int_{-\frac{h_s}{2}-h_p}^{-\frac{h_s}{2}} b \left(E_p \left(\frac{1}{2} v_i'^2 + y v_i'' \right) - e_{31} E_{2i} \right) y dy \right) \quad (C.8)$$

$$M_i = \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} b E_s v_i'' y^2 dy + \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} b (E_p v_i'' y - e_{31} E_{2i}) y dy + \int_{-\frac{h_s}{2}-h_p}^{-\frac{h_s}{2}} b (E_p v_i'' y - e_{31} E_{2i}) y dy \quad (C.9)$$

$$M_i = (2E_p I_p + E_s I_s) \kappa_i \quad (C.10)$$

$$\text{Avec } I_s = \frac{b h_s^3}{12}, I_p = b \frac{4h_p^3 + 6h_p^2 h_s + 3h_p h_s^2}{12} \text{ et } E_{2i} = \frac{V_i}{h_p}$$

L'énergie potentielle est exprimée comme suit :

$$\begin{aligned}
E_{pi} &= \frac{1}{2} \int_0^L (N_i \epsilon_{11i} + M_i \kappa_i) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} E_s S_s \left(\int_0^L v_i'^2 dx \right) + E_p S_p \left(\int_0^L v_i'^2 dx \right) - 2L e_{31} b V_i \right) \left(\frac{1}{2} v_i'^2 + y v_i'' \right) \right. \\
&\quad \left. + (2E_p I_p + E_s I_s) \kappa_i^2 \right) dx \\
&= \frac{E_s S_s + 2E_p S_p}{8L} \left(\int_0^L v_i'^2 dx \right)^2 + \frac{2E_p I_p + E_s I_s}{2} \left(\int_0^L v_i'' dx \right)^2 - \frac{e_{31} b V_i}{2} \left(\int_0^L v_i'^2 dx \right)
\end{aligned} \tag{C.11}$$

En utilisant la même procédure de résolution, on obtient l'équation du mouvement suivante :

$$\int_0^{L+L_c} \left(\begin{aligned} &(\rho_s S_s + 2\rho_p S_p) \ddot{v}_i H_1 + (2E_p I_p + E_s I_s) H_1 v_i^{IV} \\ &+ c \dot{v}_i - \frac{E_s S_s + 2E_p S_p}{2L} v_i'' H_1 \int_0^L v_i'^2 dx \\ &+ c_{ei} \frac{H_2}{L_c} (\dot{v}_i - \dot{v}_{i-1}) + c_{e(i+1)} \frac{H_2}{L_c} (\dot{v}_i - \dot{v}_{i+1}) + e_{31} b V_i v_i'' H_1 \\ &+ \frac{H_2}{L_c} F_i^m(v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) + \left(\rho_s S_s H_1 + H_2 \frac{M}{L_c} \right) \ddot{Y} \end{aligned} \right) \delta v dx = 0 \tag{C.12}$$

Avec les conditions aux limites suivants :

$$\begin{aligned}
v_i(0, t) &= v_i'(0, t) = 0 \\
v_i'(L, t) &= 0 \\
M \ddot{v}_i(L) + (2E_p I_p + E_s I_s) v_i'''(L, t) &= 0
\end{aligned} \tag{C.13}$$

On pose $m = \rho_s S_s + 2\rho_p S_p$. La production du courant électrique est obtenue par la relation suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_A \vec{D} \cdot \vec{n} dA = \frac{V_i(t)}{R_{pi}} \tag{C.14}$$

Où D est le déplacement électrique et n est le vecteur normal. Avec $D_{2i} = e_{31} \epsilon_{11i} + \epsilon_{33}^E E_{2i}$:

$$\frac{V_i(t)}{R_{pi}} = b \frac{d}{dt} \int_0^L \left(\int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2} + h_p} (e_{31} \epsilon_{11i} + \epsilon_{33}^E E_{2i}) dy + \int_{-\frac{h_s}{2} - h_p}^{-\frac{h_s}{2}} (e_{31} \epsilon_{11i} + \epsilon_{33}^E E_{2i}) dy \right) dx \tag{C.15}$$

On pose $v(x, t) = \Phi(x) a(t)$, on pré-multiplie par Φ et on intègre l'équation de mouvement (C.12) entre les limites 0 et $L + L_c$. On obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} M_{eq}\ddot{a}_i + c_{eq}\dot{a}_i + c_{e(i+1)}\phi^2(L)(\dot{a}_i - \dot{a}_{i+1}) + k_{eq}^{NL}a_i^3 \\ + c_{ei}\phi^2(L)(\dot{a}_i - \dot{a}_{i-1}) + \left(k_{eq}^L - e_{31}bV_i \int_0^L \Phi'^2 dx\right)a_i \\ + k_{i(i+1)}\phi^2(L)(a_i - a_{i+1}) + k_{i(i-1)}\phi^2(L)(a_i - a_{i-1}) \\ - \alpha_{i(i+1)}\phi^3(L)(a_i - a_{i+1})^2 - \alpha_{i(i-1)}\phi^3(L)(a_i - a_{i-1})^2 \\ + \lambda_{i(i+1)}\phi^4(L)(a_i - a_{i+1})^3 + \lambda_{i(i-1)}\phi^4(L)(a_i - a_{i-1})^3 \end{pmatrix} = -F_{eq}\ddot{Y} \quad (C.16)$$

$$2R_{pi}bh_p e_{31} \int_0^L \Phi'^2 dx \dot{a}_i a_i + 2R_{pi}bL \in_{33}^e \dot{V}_i - V_i = 0 \quad (C.17)$$

Avec :

$$\begin{aligned} k_{eq} &= (2E_p I_p + E_s I_s) \int_0^L \Phi''^2 dx & M_{eq} &= m \int_0^L \Phi^2 dx + M \Phi^2 \\ k_{eq}^{NL} &= \frac{E_s S_s + 2E_p S_p}{2L} \left(\int_0^L \Phi'^2 dx \right)^2 & c_{eq} &= c \int_0^L \Phi^2 dx = 2\xi \sqrt{\frac{k_{eq}}{M_{eq}}} \\ F_{eq} &= mL \int_0^L \Phi dx + \Phi M \end{aligned} \quad (C.18)$$

Lorsque nous avons $v_i = \|v_i\| e^{i\omega_i t}$ et $V_i = \|V_i\| e^{i2\omega_i t}$ et d'après l'équation (C.17) et la littérature [[3]], le voltage piézoélectrique est donné comme suit :

$$V_i = -2 \frac{w_i R_{pi} b h_p e_{31} \left| \int_0^L \Phi'^2 dx \right|}{\sqrt{1 + 16(w_i R_{pi} b L \in_{33}^e)^2}} a_i^2 \quad (C.19)$$

Ainsi, la puissance piézoélectrique récupérée est donnée par la relation suivante :

$$P_{piez} = \sum_i^n \frac{V_i^2}{R_{pi}} = \sum_i^n \frac{4R_{pi} \left(w_i b h_p e_{31} \int_0^L \Phi'^2 dx \right)^2}{1 + 16(w_i R_{pi} b L \in_{33}^e)^2} a_i^4 \quad (C.20)$$

Le choix du polynôme $\Phi(x)$ sous la forme suivante :

$$\phi(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (C.21)$$

Permet de satisfaire les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \Phi'(0) = 0 \\ \Phi'(L) &= 0 \end{aligned} \quad (C.22)$$

L'équation de mouvement s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} M_{eq}\ddot{v}_i + c_{eq}\dot{v}_i + c_{e(i+1)}(\dot{v}_i - \dot{v}_{i+1}) + \left(k_{eq}^{NL} + k_{ipiez}^{NL}\right)v_i^3 \\ + c_{ei}(\dot{v}_i - \dot{v}_{i-1}) + k_{eq}^L v_i + k_{i(i+1)}(v_i - v_{i+1}) \\ + k_{i(i-1)}(v_i - v_{i-1}) - \alpha_{i(i+1)}(v_i - v_{i+1})^2 - \alpha_{i(i-1)}(v_i - v_{i-1})^2 \\ + \lambda_{i(i+1)}(v_i - v_{i+1})^3 + \lambda_{i(i-1)}(v_i - v_{i-1})^3 \end{pmatrix} = -F_{eq}\ddot{Y} \quad (C.23)$$

La puissance piézoélectrique récupérée est donnée comme suit :

$$P_{piez} = \sum_i^n \frac{V_i^2}{R_{pi}} = \sum_i^n \frac{144}{25L^2} \frac{(w_i R_{pi} b h_p e_{31})^2}{1 + 16(w_i R_{pi} b L \epsilon_{33}^\epsilon)^2} v_i^4 \quad (C.24)$$

Les paramètres raideur, masses et amortissement ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} k_{eq} &= \frac{12}{L^3} (2E_p I_p + E_s I_s) & M_{eq} &= \frac{13}{35} L m + M \\ k_{eq}^{NL} &= \frac{18}{25} \frac{E_s S_s + 2E_p S_p}{L^3} & k_{ipiez}^{NL} &= \frac{96}{25L^2} \frac{w_i R_{pi} b^2 h_p e_{31}^2}{\sqrt{1 + 16(w_i R_{pi} b L \epsilon_{33}^\epsilon)^2}} \\ F_{eq} &= \frac{1}{2} m L + M & c_{eq} &= \frac{13}{35} L c = 2\xi \sqrt{\frac{k_{eq}}{M_{eq}}} \end{aligned} \quad (C.25)$$

Bibliographie

- [1] B.P. MANN et N.D. SIMS : Energy harvesting from the nonlinear oscillations of magnetic levitation. *Journal of Sound and Vibration*, 319(1–2):515 – 530, 2009.
- [2] Daniel J. APO et Shashank PRIYA : High power density levitation-induced vibration energy harvester. *Energy Harvesting and Systems*, 1(1-2):79–88, 2014.
- [3] S MAHMOUDI, N KACEM et N BOUHADDI : Enhancement of the performance of a hybrid nonlinear vibration energy harvester based on piezoelectric and electromagnetic transductions. *Smart Materials and Structures*, 23(7):075024, 2014.
- [4] S.M. SHAHRUZ : Design of mechanical band-pass filters for energy scavenging. *Journal of Sound and Vibration*, 292(3–5):987 – 998, 2006.
- [5] S. ROUNDY, E.S. LELAND, J. BAKER, E. CARLETON, E. REILLY, E. LAI, B. OTIS, J.M. RABAEY, P.K. WRIGHT et V. SUNDARARAJAN : Improving power output for vibration-based energy scavengers. *Pervasive Computing, IEEE*, 4(1):28–36, Jan 2005.
- [6] FJ BLATT, PA SCHROEDER, CL FOILES et D GREIG : *Thermoelectric power of materials*. Plenum Press, New York, 1976.
- [7] Farmer Justin RYAN : *A comparison of power harvesting techniques and related energy storage*. Thèse de doctorat, Dept. Mech. Eng., Virginia Polytechnic Institute and State Univ. Blacksburg, VA, 2007.
- [8] RL. MYERS : *The basics of physics*. Greenwood Press, Westport, Conn, 2006.
- [9] R. ELLIOTT : *Electromagnetics :History Theory and Applications*, pages i–xxiii. Wiley-IEEE Press, 1993.
- [10] O. MAH : *Fundamentals of photovoltaic materials*. National Solar Power Research Institute, 1998.
- [11] J.M. DAMASCHKE : Design of a low-input-voltage converter for thermoelectric generator. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 33(5):1203–1207, Sep 1997.
- [12] GS NOLAS, J SHARP et HJ GOLDSMID : *Thermoelectrics : basic principles and new materials developments*. Springer, New York, 2001.
- [13] Raju. MURUGAVEL : Energy harvesting, white paper. *Texas instruments*, November 2008.
- [14] université virtuelle environnement et développement DURABLE : La maîtrise de la demande d'énergie : état des lieux et perspectives, [http ://uved.univ-perp.fr/module1/co/Module-maitrise-demande.html](http://uved.univ-perp.fr/module1/co/Module-maitrise-demande.html) 2013.

- [15] T STARNER et J PARADISO : Human generated power for mobile electronics. *In : Low Power Electronics Design, C.Piguet, ed*, 45:1–35, 2004.
- [16] JF ANTAKI, GE BERTOCC, EC GREEN et AL. : A gait powered autologous battery charging system for artificial organs. *ASAIO Journal*, 41(3):M588–M595, 1995.
- [17] LC ROME, L FLYNN, EM GOLDMAN et AL. : Generating electricity while walking with loads. *Science*, (309):1725–1728, 2005.
- [18] JM DONELAN, Q LI, V NAING et AL. : Biomechanical energy harvesting : generating electricity during walking with minimal user effort. *Science*, (319):807–810, 2008.
- [19] Q. LI, V. NAING, J.A. HOFFER, D.J. WEBER, A.D. KUO et J.M. DONELAN : Biomechanical energy harvesting : Apparatus and method. *In Robotics and Automation, 2008. ICRA 2008. IEEE International Conference on*, pages 3672–3677, 2008.
- [20] COMPANY : *Demonstration experiment of the “Power-Generating Floor” at Tokyo station*. East Japan Railway Company, 2008.
- [21] A KAREEM, T KIJEWski et Y TAMURA : Mitigation of motions of tall buildings with specific examples of recent applications. *Wind and Structures*, (3):201–251, 1999.
- [22] GW HOUSNER, LA BERGMAN, TK CAUGHEY et AL. : Structural control : Past, present, and future. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(9):897–971, 1997.
- [23] T.T. SOONG et B.F. Spencer JR : Supplemental energy dissipation : state-of-the-art and state-of-the-practice. *Engineering Structures*, 24(3):243 – 259, 2002.
- [24] Xiudong TANG et Lei ZUO : Self-powered active control of structures with tmds. *In Tom PROULX, éditeur : Structural Dynamics and Renewable Energy, Volume 1*, Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, pages 227–238. Springer New York, 2011.
- [25] Xiudong TANG et Lei ZUO : Simulation and experiment validation of simultaneous vibration control and energy harvesting from buildings using tuned mass dampers. *In American Control Conference (ACC), 2011*, pages 3134–3139, June 2011.
- [26] Ni TAO, Zuo LEI et Kareem AHSAN : Assessment of energy potential and vibration mitigation of regenerative tuned mass dampers on wind excited tall buildings. *In ASME PROCEEDINGS, éditeur : 23rd Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Volume 1 : 23rd Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Parts A and B Washington, DC, USA*, pages 333–342. ASME, 2011.
- [27] R BOUD : *Status and Research and Development Priorities, Wave and Marine Current Energy*. UK Dept. of Trade and Industry (DTI), DTI Report FES-R-132, AEAT Report AEAT/ENV/1054, 2003.
- [28] GW TAYLOR : Wave energy commercialisation. *London Energy Group*, 2003.
- [29] Graeme MACKIE : Wave power and operator experience. *Seatech Week, CDRom proc*, pages 182–197, 2004.
- [30] B DREW, A PLUMMER et M SAHINKAYA : A review of wave energy converter technology. Part A : J. Power and Energy, page 887–902. Proc. IMechE Vol. 223, 2009.

-
- [31] D BOWNESS, AC LOCK, W POWRIE et AL. : Monitoring the dynamic displacements of railway track. *Transportation Science and Technology* 20 out of 33, pages 13–22. SAGE, 2007.
- [32] GR PENAMALLI : *Structural health monitoring and energy harvesting for railroad*. Thèse de doctorat, State University of New York at Stony Brook, Stony Brook, NY., 2011.
- [33] KJ PHILLIPS : *Simulation and control system of a railroad track power harvesting device*. Thèse de doctorat, University of Nebraska-Lincoln, Lincoln, NE., 2011.
- [34] John WANG, Teng LIN et Lei ZUO : High efficiency electromagnetic energy harvester for railroad application. In *ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pages V004T08A037–V004T08A037. American Society of Mechanical Engineers, 2013.
- [35] Anup BANDIVADEKAR, Kristian BODEK, Lynette CHEAH, Christopher EVANS, Tiffany GROODE, John HEYWOOD, Emmanuel KASSERIS, Matthew KROMER, Malcolm WEISS et al. : Reducing transportation’s petroleum consumption and ghg emissions. 2008.
- [36] Lon E. BELL : Cooling, Heating, Generating Power, and Recovering Waste Heat with Thermoelectric Systems. *Science*, 321(5895):1457–1461, septembre 2008.
- [37] Bin YANG, Chengkuo LEE, Wenfeng XIANG, Jin XIE, Johnny Han HE, Rama Krishna KOTLANKA, Siew Ping LOW et Hanhua FENG : Electromagnetic energy harvesting from vibrations of multiple frequencies. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 19(3):035001, 2009.
- [38] RB GOLDNER, P ZERIGIAN et Hull JR : A preliminary study of energy recovery in vehicles by using regenerative magnetic shock absorbers. *SAE paper*, page 7, 2001.
- [39] Yasuhiro KAWAMOTO, Yoshihiro SUDA, Hirofumi INOUE et Takuhiro KONDO : Modeling of electromagnetic damper for automobile suspension. *Journal of System Design and Dynamics*, 1(3):524–535, 2007.
- [40] I. MARTINS, J. ESTEVES, G.D. MARQUES et F. Pina da SILVA : Permanent-magnets linear actuators applicability in automobile active suspensions. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 55(1):86–94, 2006.
- [41] Yongchao ZHANG, Kun HUANG, Fan YU, Yonghui GU et Daofei LI : Experimental verification of energy-regenerative feasibility for an automotive electrical suspension system. In *Vehicular Electronics and Safety, 2007. ICVES. IEEE International Conference on*, pages 1–5. IEEE, 2007.
- [42] Lei ZUO et Pei-Sheng ZHANG : Energy harvesting, ride comfort, and road handling of regenerative vehicle suspensions. In *ASME 2011 Dynamic Systems and Control Conference and Bath/ASME Symposium on Fluid Power and Motion Control*, pages 295–302. American Society of Mechanical Engineers, 2011.
- [43] S RANI : Bose breakthrough : electromagnetic auto suspension. *Siliconeer*, (Issue 1): Volume VI, 2005.
- [44] Chih-Ta CHEN, Rashed Adnan ISLAM et S. PRIYA : Electric energy generator. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 53(3):656–661, 2006.

- [45] R MIRZAEIFAR, H BAHAI et S SHAHAB : Active control of natural frequencies of fgm plates by piezoelectric sensor/actuator pairs. *Smart Materials and Structures*, 17(4): 045003, 2008.
- [46] R PALOMERA-ARIAS : *Passive electromagnetic damping device for motion control of building*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA., 2005.
- [47] Abhijit GUPTA, J.A. JENDRZEJCZYK, T.M. MULCAHY et J.R. HULL : Design of electromagnetic shock absorbers. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 3(3):285–291, 2006.
- [48] Andrew J. FLEMING, S. BEHRENS et S.O.R. MOHEIMANI : Optimization and implementation of multimode piezoelectric shunt damping systems. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 7(1):87–94, Mar 2002.
- [49] Joseph J. HOLLKAMP : Multimodal passive vibration suppression with piezoelectric materials and resonant shunts. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 5(1):49–57, janvier 1994.
- [50] N.G. STEPHEN : On energy harvesting from ambient vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 293(1–2):409 – 425, 2006.
- [51] Kar W. YUNG, Peter B. LANDECKER et Daniel D. VILLANI : An analytic solution for the force between two magnetic dipoles. *Magnetic and Electrical Separation*, 9(1):39–52, 1998.
- [52] Abu Riduan Md. FOISAL, Chinsuk HONG et Gwi-Sang CHUNG : Multi-frequency electromagnetic energy harvester using a magnetic spring cantilever. *Sensors and Actuators A : Physical*, 182:106 – 113, 2012.
- [53] Thomas von BÜREN et Gerhard TRÖSTER : Design and optimization of a linear vibration-driven electromagnetic micro-power generator. *Sensors and Actuators A : Physical*, 135(2):765 – 775, 2007.
- [54] S.-B. CHOI, M.-S. SEONG et K.-S. KIM : Vibration control of an electrorheological fluid-based suspension system with an energy regenerative mechanism. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D : Journal of Automobile Engineering*, 223(4):459–469, avril 2009.
- [55] Y. KAWAMOTO, Y. SUDA, H. INOUE et T. KONDO : Electro-mechanical suspension system considering energy consumption and vehicle manoeuvre. *Vehicle System Dynamics*, 46(sup1):1053–1063, septembre 2008.
- [56] G.K. OTTMAN, H.F. HOFMANN, A.C. BHATT et G.A. LESIEUTRE : Adaptive piezoelectric energy harvesting circuit for wireless remote power supply. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, 17(5):669–676, Sep 2002.
- [57] G.K. OTTMAN, H.F. HOFMANN et G.A. LESIEUTRE : Optimized piezoelectric energy harvesting circuit using step-down converter in discontinuous conduction mode. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, 18(2):696–703, Mar 2003.
- [58] E. DALLAGO, D. MIATTON, G. VENCHI, V. BOTTAREL, G. FRATTINI, G. RICOTTI et M. SCHIPANI : Active self supplied ac-dc converter for piezoelectric energy scavenging

-
- systems with supply independent bias. *In Circuits and Systems, 2008. ISCAS 2008. IEEE International Symposium on*, pages 1448–1451, May 2008.
- [59] Xinping CAO, Wen-Jen CHIANG, Ya-Chin KING et Yi-Kuen LEE : Electromagnetic energy harvesting circuit with feedforward and feedback dc–dc pwm boost converter for vibration power generator system. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, 22(2):679–685, 2007.
 - [60] Xinping CAO et Yi-Kuen LEE : Design and fabrication of mini vibration power generator system for micro sensor networks. *In Information Acquisition, 2006 IEEE International Conference on*, pages 91–95, Aug 2006.
 - [61] M.K. KAZIMIERCZUK et A. MASSARINI : Feedforward control of dc-dc pwm boost converter. *Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 44(2):143–148, 1997.
 - [62] H. A. SODANO, G. PARK et D. J. INMAN : Estimation of electric charge output for piezoelectric energy harvesting. *Strain*, 40(2):49–58, mai 2004.
 - [63] J.T. SCRUGGS : Multi-objective optimization of regenerative damping systems in vibrating structures. *In American Control Conference, 2007. ACC '07*, pages 2672–2677, 2007.
 - [64] Xiudong TANG et Lei ZUO : Simulation and experiment validation of simultaneous vibration control and energy harvesting from buildings using tuned mass dampers. *In American Control Conference (ACC), 2011*, pages 3134–3139, June 2011.
 - [65] F.Z. PENG, Hui LI, Gui-Jia SU et J.S. LAWLER : A new zvs bidirectional dc-dc converter for fuel cell and battery application. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, 19(1):54–65, Jan 2004.
 - [66] S. INOUE et H. AKAGI : A bidirectional dc 2013 ;dc converter for an energy storage system with galvanic isolation. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, 22(6):2299–2306, 2007.
 - [67] A. MACLAURIN, R. OKOU, P. BARENDSE, M.A. KHAN et P. PILLAY : Control of a flywheel energy storage system for rural applications using a split-pi dc-dc converter. *In Electric Machines Drives Conference (IEMDC), 2011 IEEE International*, pages 265–270, 2011.
 - [68] R.M. SCHUPBACH et J.C. BALDA : Comparing dc-dc converters for power management in hybrid electric vehicles. *In Electric Machines and Drives Conference, 2003. IEMDC'03. IEEE International*, volume 3, pages 1369–1374 vol.3, 2003.
 - [69] Yu DU, Xiaohu ZHOU, Sanzhong BAI, S. LUKIC et A. HUANG : Review of non-isolated bi-directional dc-dc converters for plug-in hybrid electric vehicle charge station application at municipal parking decks. *In Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC), 2010 Twenty-Fifth Annual IEEE*, pages 1145–1151, 2010.
 - [70] Peng LI, Chongxiao ZHANG et Lei ZUO : Review of power electronics for kinetic energy harvesting systems. *In SPIE Smart Structures and Materials+ Nondestructive Evaluation and Health Monitoring*, pages 868809–868809. International Society for Optics and Photonics, 2013.

- [71] S. JALBRZYKOWSKI et T. CITKO : A bidirectional DC-DC converter for renewable energy systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences : Technical Sciences*, 57(4), 2010.
- [72] Eli S LELAND et Paul K WRIGHT : Resonance tuning of piezoelectric vibration energy scavenging generators using compressive axial preload. *Smart Materials and Structures*, 15(5):1413, 2006.
- [73] Yuntai HU, Huan XUE et Hongping HU : A piezoelectric power harvester with adjustable frequency through axial preloads. *Smart Materials and Structures*, 16(5):1961, 2007.
- [74] C EICHHORN, F GOLDSCHMIDTBOEING et P WOIAS : A frequency tunable piezoelectric energy converter based on a cantilever beam. *In In : Proceedings of PowerMEMS*, page pp 309–312, 2008.
- [75] Dylan J MORRIS, John M YOUNGSMAN, Michael J ANDERSON et David F BAHR : A resonant frequency tunable, extensional mode piezoelectric vibration harvesting mechanism. *Smart Materials and Structures*, 17(6):065021, 2008.
- [76] John M. YOUNGSMAN, Tim LUEDEMAN, Dylan J. MORRIS, Michael J. ANDERSON et David F. BAHR : A model for an extensional mode resonator used as a frequency-adjustable vibration energy harvester. *Journal of Sound and Vibration*, 329(3):277 – 288, 2010.
- [77] J. LOVERICH, R. GEIGER et J. FRANK : Stiffness nonlinearity as a means for resonance frequency tuning and enhancing mechanical robustness of vibration power harvesters, 2008.
- [78] X WU, J LIN, S KATO, K ZHANG, T REN et L LIU : A frequency adjustable vibration energy harvester. *In In : Proceedings of PowerMEMS*, page pp 245–248, 2008.
- [79] Vinod R CHALLA, M G PRASAD, Yong SHI et Frank T FISHER : A vibration energy harvesting device with bidirectional resonance frequency tunability. *Smart Materials and Structures*, 17(1):015035, 2008.
- [80] Timothy REISSMAN, Eric M. WOLFF et Ephraim GARCIA : Piezoelectric resonance shifting using tunable nonlinear stiffness, 2009.
- [81] Wen-Jong WU, Yu-Yin CHEN, Bor-Shun LEE, Jyun-Jhang HE et Yen-Tun PENG : Tunable resonant frequency power harvesting devices. volume 6169, pages 61690A–61690A–8, 2006.
- [82] Christian PETERS, Dominic MAURATH, Wolfram SCHOCK, Florian MEZGER et Yiannos MANOLI : A closed-loop wide-range tunable mechanical resonator for energy harvesting systems. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 19(9):094004, 2009.
- [83] Lei GU et Carol LIVERMORE : Passive self-tuning energy harvester for extracting energy from rotational motion. *Applied Physics Letters*, 97(8):–, 2010.
- [84] John M. YOUNGSMAN, Tim LUEDEMAN, Dylan J. MORRIS, Michael J. ANDERSON et David F. BAHR : A model for an extensional mode resonator used as a frequency-adjustable vibration energy harvester. *Journal of Sound and Vibration*, 329(3):277 – 288, 2010.

-
- [85] Dibin ZHU, Stephen ROBERTS, John TUDOR et Steve BEEBY : Closed loop frequency tuning of a vibration-based micro-generator. *In PowerMEMS 2008+ microEMS2008*, pages 229–232, November 2008. Event Dates : November 9-12, 2008.
 - [86] M WISCHKE, M MASUR, F GOLDSCHMIDTBOEING et P WOIAS : Electromagnetic vibration harvester with piezoelectrically tunable resonance frequency. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 20(3):035025, 2010.
 - [87] S.-J. JANG, E. RUSTIGHI, M. J. BRENNAN, Y. P. LEE et H.-J. JUNG : Design of a 2dof vibrational energy harvesting device. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 22(5):443–448, mars 2011.
 - [88] O. ALDRAIHEM et A. BAZ : Energy Harvester with a Dynamic Magnifier. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, avril 2011.
 - [89] Qing OU, Xiaoqi CHEN, S. GUTSCHMIDT, A. WOOD et N. LEIGH : A two-mass cantilever beam model for vibration energy harvesting applications. *In Automation Science and Engineering (CASE), 2010 IEEE Conference on*, pages 301–306, Aug 2010.
 - [90] Alper ERTURK, Jamil M. RENNO et Daniel J. INMAN : Modeling of Piezoelectric Energy Harvesting from an L-shaped Beam-mass Structure with an Application to UAVs. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, novembre 2008.
 - [91] M. ARAFA, W. AKL, A. ALADWANI, O. ALDRAIHEM et A. BAZ : Experimental implementation of a cantilevered piezoelectric energy harvester with a dynamic magnifier. *Proc. SPIE*, 7977:79770Q–79770Q–9, 2011.
 - [92] Zengtao YANG et Jiashi YANG : Connected vibrating piezoelectric bimorph beams as a wide-band piezoelectric power harvester. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 20(5):569–574, 2009.
 - [93] In-Ho KIM, Hyung-Jo JUNG, Bo Mi LEE et Seon-Jun JANG : Broadband energy-harvesting using a two degree-of-freedom vibrating body. *Applied Physics Letters*, 98(21):–, 2011.
 - [94] Ibrahim SARI, Tuna BALKAN et Haluk KULAH : An electromagnetic micro power generator for wideband environmental vibrations. *Sensors and Actuators A : Physical*, 145–146(0):405 – 413, 2008. Special Issue : Transducers/07 Eurosensors XXI, The 14th International Conference on Solid State Sensors, Actuators and Microsystems and the 21st European Conference on Solid-State Transducers The 14th International Conference on Solid State Sensors, Actuators and Microsystems and the 21st European Conference on Solid-State Transducers.
 - [95] Bin YANG, Chengkuo LEE, Wenfeng XIANG, Jin XIE, Johnny Han HE, Rama Krishna KOTLANKA, Siew Ping LOW et Hanhua FENG : Electromagnetic energy harvesting from vibrations of multiple frequencies. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 19(3):035001, 2009.
 - [96] Yonas TADESSE, Shujun ZHANG et Shashank PRIYA : Multimodal energy harvesting system : Piezoelectric and electromagnetic. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 20(5):625–632, 2009.
 - [97] Angela TRIPLETT et D. Dane QUINN : The effect of non-linear piezoelectric coupling on vibration-based energy harvesting. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 20(16):1959–1967, novembre 2009.

- [98] Samuel C. STANTON, Alper ERTURK, Brian P. MANN et Daniel J. INMAN : Nonlinear piezoelectricity in electroelastic energy harvesters : Modeling and experimental identification. *Journal of Applied Physics*, 108(7), 2010.
- [99] M. SOLIMAN, E.M. ABDEL-RAHMAN, E.F. EL-SAADANY et R.R. MANSOUR : A design procedure for wideband micropower generators. *Microelectromechanical Systems, Journal of*, 18(6):1288–1299, Dec 2009.
- [100] M S M SOLIMAN, E M ABDEL-RAHMAN, E F EL-SAADANY et R R MANSOUR : A wideband vibration-based energy harvester. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 18(11):115021, 2008.
- [101] Lars-Cyril Julin BLYSTAD et Einar HALVORSEN : An energy harvester driven by colored noise. *Smart Materials and Structures*, 20(2):025011, 2011.
- [102] Samuel C. STANTON, Clark C. MCGEHEE et Brian P. MANN : Reversible hysteresis for broadband magnetopiezoelectric energy harvesting. *Applied Physics Letters*, 95(17), 2009.
- [103] Ali H NAYFEH : *Perturbation methods*. John Wiley & Sons, 2008.
- [104] JK KEVORKIAN et Julian D COLE : *Multiple scale and singular perturbation methods*, volume 114. Springer Science & Business Media, 2012.
- [105] Najib KACEM, Sebastien HENTZ, D PINTO, B REIG et V NGUYEN : Nonlinear dynamics of nanomechanical beam resonators : improving the performance of nems-based sensors. *Nanotechnology*, 20(27):275501, 2009.
- [106] Norman F CARNAHAN et Kenneth E STARLING : Equation of state for nonattracting rigid spheres. *The Journal of Chemical Physics*, 51(2):635–636, 1969.
- [107] SD CONTE et C DE BOOR : Elementary numerical analysis mcgraw-hill. *New York*, 19722, 1972.
- [108] Erwin FEHLBERG : Klassische runge-kutta-formeln vierter und niedrigerer ordnung mit schrittweiten-kontrolle und ihre anwendung auf waermeleitungsprobleme. *Computing*, 6(1-2):61–71, 1970.
- [109] Nathan M NEWMARK : A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, 85(3):67–94, 1959.
- [110] HB KELLER : Lectures on numerical methods in bifurcation problems. *Applied Mathematics*, 217:50, 1987.
- [111] Ali H NAYFEH et Balakumar BALACHANDRAN : *Applied nonlinear dynamics : analytical, computational and experimental methods*. John Wiley & Sons, 2008.
- [112] Rüdiger SEYDEL : *Practical bifurcation and stability analysis*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2009.
- [113] Thomas S PARKER et Leon CHUA : *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [114] SL LAU et YK CHEUNG : Amplitude incremental variational principle for nonlinear vibration of elastic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 48(4):959–964, 1981.

-
- [115] S NACIVET, C PIERRE, F THOUVEREZ et L JEZEQUEL : A dynamic lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems. *Journal of Sound and Vibration*, 265(1):201–219, 2003.
 - [116] Bruno COCHELIN et Christophe VERGEZ : A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of sound and vibration*, 324(1):243–262, 2009.
 - [117] L AZRAR, B COCHELIN, N DAMIL et M POTIER-FERRY : An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behaviour of elastic plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(8):1251–1277, 1993.
 - [118] Bruno COCHELIN : A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers & structures*, 53(5):1181–1192, 1994.
 - [119] Sébastien BAGUET et Bruno COCHELIN : On the behaviour of the anm continuation in the presence of bifurcations. *Communications in numerical methods in engineering*, 19(6):459–471, 2003.
 - [120] Bruno COCHELIN, Nouredine DAMIL et Michel POTIER-FERRY : Méthode asymptotique numérique. 2007.
 - [121] Remi ARQUIER, Bruno COCHELIN et Christophe VERGEZ : Manlab-logiciel de continuation interactif. In *7ème colloque national en calcul des structures (France, Giens)*, page xx. nc, 2005.
 - [122] Sami KARKAR : *Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires : application aux instruments de musique auto-oscillants*. Thèse de doctorat, Aix-Marseille, 2012.
 - [123] Christophe PIERRE : Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. *Journal of Sound and Vibration*, 126(3):485–502, 1988.
 - [124] Andrea SALTELLI, Karen CHAN, E Marian SCOTT *et al.* : *Sensitivity analysis*, volume 1. Wiley New York, 2000.
 - [125] Dirk JW DE PAUW et Peter A VANROLLEGHEM : Practical aspects of sensitivity analysis for dynamic models. In *Proceedings of the 4th IMACS Symposium on Mathematical Modelling (MATHMOD)*. Vienna, Austria, volume 47, 2003.
 - [126] Hong YUE, Martin BROWN, Joshua KNOWLES, Hong WANG, David S BROOMHEAD et Douglas B KELL : Insights into the behaviour of systems biology models from dynamic sensitivity and identifiability analysis : a case study of an nf-kb signalling pathway. *Molecular BioSystems*, 2(12):640–649, 2006.
 - [127] Millett Granger MORGAN, Max HENRION et Mitchell SMALL : *Uncertainty : a guide to dealing with uncertainty in quantitative risk and policy analysis*. Cambridge university press, 1992.
 - [128] Michael D MCKAY *et al.* : *Evaluating prediction uncertainty*. US Nuclear Regulatory Commission, 1995.
 - [129] Michael D MCKAY, Richard J BECKMAN et William J CONOVER : A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 42(1):55–61, 2000.

- [130] A SALTELLI et Il'ya Meerovich SOBOLOV : Sensitivity analysis for nonlinear mathematical models : numerical experience. *Matematicheskoe Modelirovanie*, 7(11):16–28, 1995.
- [131] RI CUKIER, CM FORTUIN, Kurt E SHULER, AG PETSCHKE et JH SCHAIBLY : Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. i theory. *The Journal of chemical physics*, 59(8):3873–3878, 1973.
- [132] JW HALL, S TARANTOLA, PD BATES et MS HORRITT : Distributed sensitivity analysis of flood inundation model calibration. *Journal of Hydraulic Engineering*, 131(2):117–126, 2005.
- [133] Dan G CACUCI, Mihaela IONESCU-BUJOR et Ionel Michael NAVON : *Sensitivity and uncertainty analysis, volume II : applications to large-scale systems*, volume 2. CRC press, 2005.
- [134] Andrea SALTELLI, Stefano TARANTOLA, Francesca CAMPOLONGO et Marco RATO : *Sensitivity analysis in practice : a guide to assessing scientific models*. John Wiley & Sons, 2004.
- [135] Andrea SALTELLI, Marco RATO, Terry ANDRES, Francesca CAMPOLONGO, Jessica CARIBONI, Debora GATELLI, Michaela SAISANA et Stefano TARANTOLA : *Global sensitivity analysis : the primer*. John Wiley & Sons, 2008.
- [136] Francesca CAMPOLONGO, Jessica CARIBONI et Andrea SALTELLI : An effective screening design for sensitivity analysis of large models. *Environmental modelling & software*, 22(10):1509–1518, 2007.
- [137] Max D MORRIS : Factorial sampling plans for preliminary computational experiments. *Technometrics*, 33(2):161–174, 1991.
- [138] S TARANTOLA, D GATELLI, SS KUCHERENKO, W MAUNTZ *et al.* : Estimating the approximation error when fixing unessential factors in global sensitivity analysis. *Reliability Engineering & System Safety*, 92(7):957–960, 2007.
- [139] Kalyanmoy DEB : Multi-objective optimization. *In Search methodologies*, pages 403–449. Springer, 2014.
- [140] Kalyanmoy DEB, Amrit PRATAP, Sameer AGARWAL et TAMT MEYARIVAN : A fast and elitist multiobjective genetic algorithm : Nsga-ii. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 6(2):182–197, 2002.
- [141] Nidamarthi SRINIVAS et Kalyanmoy DEB : Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. *Evolutionary computation*, 2(3):221–248, 1994.
- [142] I ABED, N KACEM, N BOUHADDI et ML BOUAZIZI : Multi-modal vibration energy harvesting approach based on nonlinear oscillator arrays under magnetic levitation. *Smart Materials and Structures*, 25(2):025018, 2016.
- [143] I ABED, S MAHMOUDI, N KACEM, ML BOUAZIZI et N BOUHADDI : Dynamique non-linéaire d'un récupérateur d'énergie vibratoire à transduction électromagnétique. *Proc. COTUME*, 2014.
- [144] Ali H NAYFEH : Introduction to perturbation methods. *John Willey and Sons*, 1981.
- [145] Najib KACEM et Sebastien HENTZ : Bifurcation topology tuning of a mixed behavior in nonlinear micromechanical resonators. *Applied Physics Letters*, 95(18):183104, 2009.

-
- [146] I ABED, N KACEM, ML BOUAZIZI et N BOUHADDI : Nonlinear 2-dofs vibration energy harvester based on magnetic levitation. *In Proceedings of the 33rd IMAC, Shock & Vibration, Aircraft/Aerospace, and Energy Harvesting, Volume 9*, pages 39–45. Springer, 2015.
- [147] Henri SOHIER, Helene PIET-LAHANIER et Jean-Loup FARGES : Analysis and optimization of an air-launch-to-orbit separation. *Acta Astronautica*, 108:18–29, 2015.
- [148] I ABED, N KACEM, ML BOUAZIZI et N BOUHADDI : Nonlinear dynamic behavior of a 3-dofs system induced by magnetic levitation. *Proc. CMSM*, 2015.
- [149] I ABED, N KACEM, N BOUHADDI et ML BOUAZIZI : Nonlinear dynamics of magnetically coupled beams for multi-modal vibration energy harvesting. *SPIE Smart Structures and Materials+ Nondestructive Evaluation and Health Monitoring*, pages 97992C–97992C, 2016.
- [150] Hua YU, Jieli ZHOU, Licheng DENG et Zhiyu WEN : A vibration-based mems piezoelectric energy harvester and power conditioning circuit. *Sensors*, 14(2):3323, 2014.
- [151] S ROUNDY et P K WRIGHT : A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics. *Smart Materials and Structures*, 13(5):1131, 2004.
- [152] M. RENAUD, K. KARAKAYA, T. STERKEN, P. FIORINI, C. Van HOOFF et R. PUERS : Fabrication, modelling and characterization of {MEMS} piezoelectric vibration harvesters. *Sensors and Actuators A : Physical*, 145–146:380 – 386, 2008.
- [153] R ELFRINK, T M KAMEL, M GOEDBLOED, S MATOVA, D HOHLFELD, Y van ANDEL et R van SCHAIJK : Vibration energy harvesting with aluminum nitride-based piezoelectric devices. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 19(9):094005, 2009.
- [154] D.F. BERDY, P. SRISUNGSITTHISUNTI, Byunghoo JUNG, Xianfan XU, J.F. RHOADS et D. PEROULIS : Low-frequency meandering piezoelectric vibration energy harvester. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 59(5):846–858, 2012.

Résumé

Afin d'accomplir les promesses des récupérateurs d'énergie vibratoire (VEHs) qui s'imposent comme une alternative majeure pour garantir l'autonomie des capteurs pour la surveillance, leurs performances en termes de bande passante et puissance récupérable doivent être améliorées. Dans cette thèse, à la différence des VEHs classiques linéaires et multimodales ou non-linéaires et mono-fréquence, on propose une approche de récupération d'énergie basée sur des réseaux d'aimants couplés en lévitation ou élastiquement guidés combinant les avantages des non-linéarités et des interactions modales. Une étude bibliographique sur les récupérateurs d'énergie vibratoire est effectuée. En particulier, les inconvénients des récupérateurs linéaires et les techniques de réglage de fréquence sont présentées. De plus, les méthodes non-linéaires sont présentées pour définir une procédure de résolution permettant l'étude de la dynamique des récupérateurs non-linéaires. Les équations du mouvement qui contiennent la non-linéarité magnétique, la non-linéarité géométrique et l'amortissement électromagnétique sont résolues en utilisant la méthode de la balance harmonique couplée avec la méthode asymptotique numérique. Une méthodologie d'optimisation multi-objectif basée sur l'algorithme Non Sorting Genetic Algorithm est appliquée afin de calculer les solutions optimales pour maximiser les performances du récupérateur d'énergie. Grâce au couplage non-linéaire et aux interactions modales, pour le cas des trois aimants couplés, l'approche proposée permet la récupération de l'énergie vibratoire dans la gamme fréquentielle 4,6 - 14,5 Hz, avec une bande passante d'environ 190 % et une puissance normalisée de $20,2 \text{ mW cm}^{-3} \text{ g}^{-2}$.

Mots-clés: Dynamique non linéaire, récupération d'énergie vibratoire, lévitation magnétique, interaction multimodale, réseau d'aimants



■ École doctorale SPIM 16 route de Gray F - 25030 Besançon cedex

■ tél. +33 (0)3 81 66 66 02 ■ ed-spim@univ-fcomte.fr ■ www.ed-spim.univ-fcomte.fr



Abstract

In order to accomplish the promises of vibration energy harvesters (VEHs) as a major alternative to power sensors, their performances in terms of frequency bandwidth and harvested power have to be improved. In this thesis, unlike classical VEHs either linear and multimodal or nonlinear and mono-frequency, we propose a vibration energy harvesting approach based on arrays of coupled levitated or elastically guided magnets combining the benefits of nonlinearities and modal interactions.

A review of VEHs is carried out. Particularly, the design issues of linear harvesters are addressed and frequency tuning techniques are presented. A review of nonlinear methods is also presented in order to define a solving procedure enabling the investigation of the dynamics of nonlinear VEHs. The equations of motion which include the magnetic nonlinearity, the geometric nonlinearity and the electromagnetic damping are solved using the harmonic balance method coupled with the asymptotic numerical method. A multi-objective optimization procedure is introduced and performed using a non-dominated sorting genetic algorithm for the cases of small magnet arrays in order to select the optimal solutions in term of performances by bringing the eigenmodes close to each other in terms of frequencies and amplitudes. Thanks to the nonlinear coupling and the modal interactions even for only three coupled magnets, the proposed method enable harvesting the vibration energy in the operating frequency range of 4.6–14.5 Hz, with a bandwidth of 190 % and a normalized power of $20.2 \text{ mW cm}^{-3} \text{ g}^{-2}$.

Keywords: nonlinear dynamics, vibration energy harvesting, magnetic levitation, multi-modal interactions, oscillator arrays